CLASSIFICATION DER FLÄCHEN

NACH DER

TRANSFORMATIONSGRUPPE IHRER GEODÄTISCHEN CURVEN

VON

SOPHUS LIE.

Universitäts-Program

für das erste Semester 1879.

KRISTIANIA.

GEDRUCKT BEI GRØNDAHL & SØN.

1879.

Foreign literary exchange

of Norway.

By C. Holst, ancient Secretary

of **the Royal University of Norway, Christiania, Norway.**

With the compliments of the Signed, charged with the direction of **the foreign literary exchange of Norway.**

C. Holst,
ancient Secretary of the Roy. Univ. of Norway.

☞ All correspondence and all literary sendings is to be adressed:

Royal University of Norway, Christiania, Norway.

If in those works I have sent anything should be wanting to complete a series or set, I beg You to inform me of it.

CLASSIFICATION DER FLÄCHEN

NACH DER

TRANSFORMATIONSGRUPPE IHRER GEODÄTISCHEN CURVEN,

VON

SOPHUS LIE.

Universitäts-Program

für das erste Semester 1879.

KRISTIANIA.

GEDRUCKT BEI GRØNDAHL & SØN.

1879.

CLASSIFICATION DER FLÄCHEN NACH DER TRANSFORMATIONSGRUPPE IHRER GEODÄTISCHEN CURVEN.

Bei Untersuchungen über gewöhnliche oder partielle Differential-Gleichungen verdienen solche Eigenschaften derselben eine besondere Aufmerksamkeit, die bei beliebigen *Punkt*-Transformationen (oder *Berührungs*-Transformationen) ungeändert bleiben. Wichtig ist ein solches Studium, u. A. auch deswegen, weil bei den gewöhnlichen Integrations-Methoden eben solche Eigenschaften in Betracht kommen. In genauster Verbindung mit dem soeben besprochenen Probleme steht die Aufgabe, zu untersuchen, ob eine oder mehrere vorgelegte Gleichungen durch zweckmässigen Coordinatenwahl auf eine gewisse Form gebracht werden können*).

Die hiermit definirte Untersuchungsrichtung, die ich seit 1872 consequent verfolgt habe, führte ich für die partiellen Differential-Gleichungen 1. O., wenn ich nicht irre, glücklich durch in einigen Abhandlungen, die in *Mathematische Annalen*, Bd. VIII, IX, XI gedruckt sind. (Sieh auch die Berichte der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, 1872, 1873 und 1874).

Was partielle Differential-Gleichungen höherer Ordnung wie auch gewöhnliche Differential-Gleichungen betrifft, so habe ich mich bis jetzt wesentlich auf Andeutungen beschräncken müssen. Es war mir in der That nothwendig, zuerst eine umfangsreiche Hülf-Theorie, die Theorie der Transformationsgruppen zu entwickeln. In Göttinger Nachrichten 1874, N° 22 gab ich eine Aufzählung von allen Gruppen einer zweifach-ausgedehnten Mannigfaltigkeit, indem ich zugleich angab, dass sich hierauf eine rationelle Integrations-Theorie solcher Gleichungen

$$f(x y y' \dots y^{(n)}) = 0$$

*) Wünscht man z. B. zu wissen, ob aus einem vorgelegten Systeme Gleichungen zwischen $x_1 x_2 \dots x_n p_1 \dots p_n$ und den höheren Differential-Quotienten von z eine gewisse Anzahl der Grössen x, p weggeschafft werden kann, so genügt es, die Transformationsgruppe des betreffenden Gleichungs-Systems zu bestimmen.

die überhaupt eine Transformationsgruppe besassen, begründen liesse. Sodann gab ich in *Arkiv for Mathematik og Naturvidenskab* Bd. I. und III. in vier Abhandlungen eine ausführliche Theorie der Transformationsgruppen einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Und in weiteren Abhandlungen beabsichtige ich die Transformations-Theorie einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu entwickeln.

Indem ich mich jetzt zur Verwerthung meiner Transformations-Theorie für gewöhnliche Differential-Gleichungen wende, halte ich es für zweckmässig, zuerst an einem speciellen Beispiele die Tragweite und überhaupt das Wesenm einer Untersuchungsmethode auseinanderzusetzen. Und hierzu scheint mir die Differential-Gleichung der geodätischen Curven einer Fläche sich sehr gut zu eignen. Ich werde daher versuchen in der nachstehenden Abhandlung die Transformationsgruppe der soeben besprochenen Differential-Gleichung zu untersuchen.

Ist das Bogenelement einer Fläche auf die Form

$$ds^2 = F(xy)\,dx\,dy$$

gebracht, so werden die geodätischen Curven dieser Fläche bekanntlich durch die Gleichung 2. O.

$$F\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dF}{dx}\frac{dy}{dx} - \frac{dF}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

bestimmt. Ist nun F eine *arbiträre* Funktion von x und y, so gestattet diese Gleichung *keine* infinitesimale Punkt-Transformation. Das heisst, es ist in diesem allgemeinen Falle unmöglich den Grössen x und y solche Incremente

$$\delta x = \xi(xy)\,\delta t, \quad \delta y = \eta(xy)\,\delta t$$

zu geben, dass *jede* geodätische Curve in eine ebensolche, infinitesimal benachbarte Curve übergeführt wird. Es stellt sich daher die Aufgabe, die Grösse F in allgemeinster Weise derart zu bestimmen, dass die Differential-Gleichung der geodätischen Curven eine infinitesimale Transformation gestattet. Ich zeige, dass es *drei verschiedene Flächen-Classen* giebt, die diese Forderung erfüllen. 1) Entweder kann F durch Einführung von zweckmässigen Funktionen bez. von x und von y als neues x und als neues y die Form

$$F = e^{\alpha x}\Phi(x-y) \qquad (\alpha = \text{Const.})$$

erhalten. Jede hierher gehörige Fläche besitzt die charakteristische Eigenschaft auf ∞^1 mit ihr aehnlichen Flächen abwickelbar zu sein. 2) Oder auch kann F die Form

$$y\,\varphi(x) + \Phi(x)$$

erhalten. Dabei sind $\varphi(x)$ und $\Phi(x)$ näher bestimmt durch zwei gewöhnliche Differentialgleichungen, die ich integrire. Oder endlich kann F die Form

$$F = \varphi(x+y) + \Phi(x-y)$$

erhalten*). Dabei sind wiederum φ und Φ durch gewöhnliche Differential-Gleichungen als Funktionen ihrer Argumente näher bestimmt. Ich gebe mehrere bemerkenswerthe Particularlösungen dieser Gleichungen, die jedoch möglicherweise noch weitere Lösungen besitzen können.

Ich suche sodann alle Flächen, deren geodätische Curven *mehrere* inf. Transformationen gestatten. Diese Transformationen bilden dabei eo ipso eine Gruppe. Indem ich *Beltrami's* und *Schläfli's* Untersuchungen über Flächen von constantem Krümmungsmaase mit meinen eigenen Untersuchungen über Transformationsgruppen verbinde, erkenne ich, dass *nur* die Flächen von constantem Krümmungsmaase mehr als *drei* und zwar acht infinitesimale Transformationen ihrer geodätischen Curven gestatten.

Ich suche zunächst alle Flächen, deren geodätische Curven mehrere *conforme* inf. Transformationen gestatten. Ich zeige, dass alle diese Flächen durch die Gleichung

$$F = A.(x-y)^m$$

bestimmt sind. (Unter diesen merkwürdigen Flächen findet sich insbesondere die Rotationsfläche einer Curve 3. O. mit Spitze). Soll unsere Fläche *mehr als zwei* conforme inf. Transformationen gestatten, so muss $m = -2$ sein; dann aber hat sie constantes Krümmungsmaas.

Ich suche sodann alle Flächen, die sowohl meiner ersten wie meiner zweiten Classe angehören, deren Bogenelement daher sowohl die Form

$$ds^2 = e^{ax}\,\Phi(x-y)\,dx\,dy$$

wie die Form

$$ds^2 = (y\,\varphi(x) + \Phi(x))\,dx\,dy$$

erhalten kann. Ich zeige, dass alle derartige Flächen durch die Gleichung

$$F = yx + D \qquad (D = \text{Const.})$$

bestimmt sind. Alle diese Flächen gehören zugleich meiner dritten Classe; ihre geodätische Curven gestatten *drei* verschiedene infinitesimale Transformationen. Diese Flächen sind die einzigen, die gleichzeitig der zweiten und der dritten Classe angehören.

Ich suche endlich alle Flächen, die gleichzeitig der ersten und der dritten Classe angehören. Ausser der früher genannten Flächen $F = yx + D$ giebt es noch weitere Flächenfamilien z. B.

$$F = x + iy,$$

$$F = \frac{A}{(x+y)^2} + \frac{B}{(x-y)^2},$$

die diese Forderung erfüllen. Ich bestimme alle diese Flächen.

---

*) *Liouville* bestimmt die geodätischen Curven aller Flächen, deren Bogenelement die Form $ds^2 = (\varphi(x+y) + \Phi(x-y))\,dx\,dy$ besitzt.

Nach *Jacobi* kennt man einen Multiplicator der Differential-Gleichung der geodätischen Curven. Kennt man nun zugleich eine inf. Transformation dieser Gleichung, so ist es nach einem Satze von mir (Math. Ann. Bd. XI., p. 508) im Allgemeinen möglich eine oder unter Umständen sogar zwei Lösungen durch Differentiation herzuleiten. Diese Theorie giebt mir eine bemerkenswerthe Bestimmung der geodätischen Curven aller Flächen, die der zweiten oder dritten Classe angehören.

Bekanntlich hat *Christoffel* schon früher eine Classification der Flächen nach dem Verhalten der auf der Fläche gelegenen geodätischen Dreiecke gegeben (Abhandlungen der Academie der Wissenschaften zu Berlin, 1868). Wenn ich nicht irre, ist jedoch das Christoffelsche Eintheilungs-Princip von dem meinigen gänzlich verschieden. Nach meiner Auffassung hat mein Classifications-Princip einen mehr elementaren Charakter als das Christoffelsche. In Folge dessen ist es mir grösstentheils gelungen, diejenigen Flächen, die meinen verschiedenen Classen und Unterclassen angehören, wirklich zu bestimmen. Auf der anderen Seite brauche ich nicht hervorzuheben, dass *Christoffel's* Abhandlung einen allgemeineren Charakter als die meinige besitzt.

§ 1.

Analytische Formulirung des Problems.

1. Soll die lineare partielle Differential-Gleichung

$$A(f) = X\frac{df}{dx} + Y\frac{df}{dy} + Z\frac{df}{dz} = 0$$

die infinitesimale Transformation

$$B(f) = \xi\frac{df}{dx} + \eta\frac{df}{dy} + \zeta\frac{df}{dz}$$

gestatten, so ist nach meinen früheren Untersuchungen (Christiania, Gesellschaft der Wissenschaften, 1874, p. 255 u. s. w; Math. Annalen Bd. XI., p. 495 u. s. w.) dazu nothwendig und hinreichend, dass eine Relation der Form

$$A(B(f)) - B(A(f)) = \varphi(xyz) \,.\, A(f)$$

identisch stattfindet.

Sei jetzt vorgelegt eine gewöhnliche Differential-Gleichung 2. O.

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \psi\left(x\,y\,\frac{dy}{dx}\right) = \psi(x\,y\,y')$$

und lass uns verlangen, dass dieselbe die infinitesimale *Punkt*-Transformation

$$\text{(2)} \qquad \delta x = \xi(xy)\,\delta t, \quad \delta y = \eta(xy)\,\delta t$$

gestattet. Um diese Forderung analytisch zu formuliren, berechne ich zuerst den Zuwachs des Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}$ vermöge der inf. Transformation. Es ist

$$\frac{\delta}{\delta t}\frac{dy}{dx}=\frac{dx\,.\,\frac{\delta\, dy}{\delta t}-dy\,.\,\frac{\delta\, dx}{\delta t}}{dx^2},$$

und durch Vertauschung der Symbole δ und d kommt

$$\frac{\delta}{\delta t}\frac{dy}{dx}=\frac{dx\,.\,d\frac{\delta y}{\delta t}-dy\,.\,d\frac{\delta x}{\delta t}}{dx^2}=\frac{dx\,d\eta-dy\,d\xi}{dx^2}$$

woraus

$$\frac{\delta}{\delta t}\frac{dy}{dx}=\frac{d\eta}{dx}+\frac{dy}{dx}\frac{d\eta}{dy}-\frac{dy}{dx}\frac{d\xi}{dx}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d\xi}{dy}.$$

Folglich wird die infinitesimale Punkt-Transformation (2) nach unserer gewöhnlichen Terminologie repräsentirt durch das Symbol

$$B(f)=\xi\frac{df}{dx}+\eta\frac{df}{dy}+\left(\frac{d\eta}{dx}+\frac{dy}{dx}\frac{d\eta}{dy}-\frac{dy}{dx}\frac{d\xi}{dx}-\frac{dy^2}{dx}\frac{d\xi}{dy}\right)\frac{df}{dy'},$$

wo ξ und η nur von x und y abhängen.

Andererseits ist die Gleichung (1) bekanntlich aequivalent mit der linearen partiellen Gleichung

$$A(f)=\frac{df}{dx}+y'\frac{df}{dy}+\psi(xyy')\frac{df}{dy'}=0.$$

Soll daher die Gleichung (1) die inf. Transformation (2) gestatten, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass eine Relation der Form

$$A(B(f))-B(A(f))=\lambda\,.\,A(f)$$

stattfindet. Aber diese Gleichung löst sich in die drei folgenden auf

$$\frac{d\xi}{dx}+y'\frac{d\xi}{dy}=\lambda,$$

$$\frac{d\eta}{dx}+y'\frac{d\eta}{dy}-\left(\frac{d\eta}{dx}+y'\frac{d\eta}{dy}-y'\frac{d\xi}{dx}-y'^2\frac{d\xi}{dy}\right)=\lambda y',$$

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2\eta}{dx^2}+y'\frac{d^2\eta}{dx\,dy}-y'\frac{d^2\xi}{dx^2}-y'^2\frac{d^2\xi}{dx\,dy}\\&+y'\left(\frac{d^2\eta}{dx\,dy}+y'\frac{d^2\eta}{dy^2}-y'\frac{d^2\xi}{dx\,dy}-y'^2\frac{d^2\xi}{dy^2}\right)\\&+\psi\left(\frac{d\eta}{dy}-\frac{d\xi}{dx}-2y'\frac{d\xi}{dy}\right)-\xi\frac{d\psi}{dx}-\eta\frac{d\psi}{dy}\\&-\left(\frac{d\eta}{dx}+y'\frac{d\eta}{dy}-y'\frac{d\xi}{dx}-y'^2\frac{d\xi}{dy}\right)\frac{df}{dy'}=\lambda\psi,\end{aligned}\right.$$

unter denen die erste die Grösse λ bestimmt, während die zweite identisch besteht, so dass wir nur *eine* Bedingungs-Gleichung erhalten.

2. Die geodätischen Curven einer Fläche, deren Bogenelement auf die Form

$$ds = \sqrt{F\,dx\,dy} = \sqrt{F.y'}\,.\,dx$$

gebracht ist, sind nach den Regeln der Variations-Rechnung bestimmt durch die Gleichung

$$\delta \int \sqrt{Fy'}\,.\,dx = 0,$$

oder durch die aequivalente Differential-Gleichung

$$\frac{d(\sqrt{F}\sqrt{y'})}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{d(\sqrt{F}\sqrt{y'})}{dy'} = 0,$$

die durch Ausführung die Form,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'\frac{d(\log F)}{dx} - y'^2\frac{d(\log F)}{dy}$$

annimmt. Um die folgenden Rechnungen zu vereinfachen, setzen wir

$$\log F = w,$$

und also wird

$$ds = e^{\frac{w}{2}}\sqrt{y'}\,.\,dx$$

die Form des Bogenelements und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'\frac{dw}{dx} - y'^2\frac{dw}{dy}$$

die Differential-Gleichung der geodätischen Curven.

3. Sollen daher die geodätischen Curven einer Fläche die inf. Punkt-Transformation $\xi\frac{df}{dx} + \eta\frac{df}{dy}$ gestatten, so ist nach Nummer 1 dazu erforderlich und hinreichend, dass die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\eta}{dx^2} + 2y'\frac{d^2\eta}{dx\,dy} - y'\frac{d^2\xi}{dx^2} - 2y'^2\frac{d^2\xi}{dx\,dy} + y'^2\frac{d^2\eta}{dy^2} - y'^3\frac{d^2\xi}{dy^2}\\
&+\left(y'\frac{dw}{dx} - y'^2\frac{dw}{dy}\right)\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx} - 2y'\frac{d\xi}{dy}\right) - \xi\left(y'\frac{d^2w}{dx^2} - y'^2\frac{d^2w}{dx\,dy}\right)\\
&-\eta\left(y'\frac{d^2w}{dx\,dy} - y'^2\frac{d^2w}{dy^2}\right) - \left(\frac{d\eta}{dx} + y'\frac{d\eta}{dy} - y'\frac{d\xi}{dx} - y'^2\frac{d\xi}{dy}\right)\left(\frac{dw}{dx} - 2y'\frac{dw}{dy}\right)\\
&-\left(y'\frac{dw}{dx} - y'^2\frac{dw}{dy}\right)\left(\frac{d\xi}{dx} + y'\frac{d\xi}{dy}\right) = 0
\end{aligned}$$

stattfindet. Aber diese Gleichung zerlegt sich da ξ, η und w nur von x und y abhängen, in die vier folgenden:

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2\eta}{dx^2}-\frac{d\eta}{dx}\frac{dw}{dx}=0,\\
&-\frac{d^2\xi}{dy^2}+\frac{d\xi}{dy}\frac{dw}{dy}=0,\\
&2\frac{d^2\eta}{dx\,dy}-\frac{d^2\xi}{dx^2}-\xi\frac{d^2w}{dx^2}-\eta\frac{d^2w}{dx\,dy}+2\frac{d\eta}{dx}\frac{dw}{dy}-\frac{dw}{dx}\frac{d\xi}{dx}=0,\\
&-2\frac{d^2\xi}{dx\,dy}+\frac{d^2\eta}{dy^2}+\xi\frac{d^2w}{dx\,dy}+\eta\frac{d^2w}{dy^2}-2\frac{d\xi}{dy}\frac{dw}{dx}+\frac{dw}{dy}\frac{d\eta}{dy}=0,
\end{aligned}\right.
$$

mit deren Integration wir uns jetzt beschäftigen werden. Dabei werden wir drei verschiedene Fälle separat behandeln müssen. Im Paragraph 2 behandeln wir den anscheinend speciellen Fall, der sich jedoch als der allgemeinste Fall ergiebt, dass

$$\frac{d\eta}{dx}=0,\quad \frac{d\xi}{dy}=0$$

ist. Dieser Fall lässt sich bekanntlich geometrisch dadurch charakterisiren, dass die betreffende infinitesimale Transformation *conform* ist.

In Paragraph 3 erledigen wir sodann den Fall, dass die eine unter den Grössen $\frac{d\xi}{dy}$, $\frac{d\eta}{dx}$ gleich Null, die zweite von Null verschieden ist. Endlich in Paragraph 4 setzen wir voraus, dass diese beiden Grössen von Null verschieden sind.

§ 2.

Gestatten die geodätischen Curven eine conforme inf. Transformation, so lässt sich die Fläche abwickeln auf eine Spiralfläche.

4. Verlangen wir, dass

$$\frac{d\xi}{dy}=0,\quad \frac{d\eta}{dx}=0,$$

sein soll, so sind die beiden ersten Gleichungen (4) eo ipso identisch erfüllt; während die beiden letzten Gleichungen (4) in die folgenden übergehen

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2\xi}{dx^2}+\xi\frac{d^2w}{dx^2}+\eta\frac{d^2w}{dx\,dy}+\frac{dw}{dx}\frac{d\xi}{dx}=0,\\
&\frac{d^2\eta}{dy^2}+\xi\frac{d^2w}{dx\,dy}+\eta\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{dw}{dy}\frac{d\eta}{dy}=0.
\end{aligned}
$$

Dieselben sind vollständige Differential-Quotienten:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{d\xi}{dx}+\xi\frac{dw}{dx}+\eta\frac{dw}{dy}\right)=0,\\
&\frac{d}{dy}\left(\frac{d\eta}{dy}+\xi\frac{dw}{dx}+\eta\frac{dw}{dy}\right)=0,
\end{aligned}
$$

und also kommt durch Integration

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dx}+\xi\dfrac{dw}{dx}+\eta\dfrac{dw}{dy}=\varphi(y), \\[2mm] \dfrac{d\eta}{dy}+\xi\dfrac{dw}{dx}+\eta\dfrac{dw}{dy}=f(x), \end{cases}$$

Hier können nun verschiedene Fälle eintreten, indem ξ und η entweder gleich Null oder von Null verschieden sein können.

Sind ξ und η beide von Null verschieden, so können wir, indem wir zweckmässige Funktionen $x'(x)$ und $y'(y)$ als neues x und neues y einführen, immer erreichen, dass ξ und η gleich 1 werden. In der That es ist

$$\frac{\delta x'}{\delta t}=\frac{dx'}{dx}\frac{\delta x}{\delta t}=\frac{dx'}{dx}\xi,$$

$$\frac{\delta y'}{\delta t}=\frac{dy'}{dy}\frac{\delta y}{\delta t}=\frac{dy'}{dy}\eta.$$

Man braucht daher nur x' und y' durch die Differential-Gleichungen

$$\frac{dx'}{dx}\xi=1,\quad \frac{dy'}{dy}\eta=1$$

zu bestimmen, um das erwünschte Resultat zu erreichen. Wir können daher in (5) $\xi=1$, und $\eta=1$ setzen. Dies giebt

$$\frac{dw}{dx}+\frac{dw}{dy}=\varphi(y),$$

$$\frac{dw}{dx}+\frac{dw}{dy}=f(x),$$

woraus folgt, dass $\varphi(y)=f(x)=\text{Const.}$ sein muss. Also wird

$$w=\varrho(x-y)+Ax \qquad (A=\text{Const.}),$$

$$e^{w}=e^{Ax}\Phi(x-y),$$

womit der Fall, dass ξ und η beide von Null verschieden sind, erledigt ist.

Da ξ und η nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, inden sonst unsere inf. Transformation alle Punkte der Fläche invariant liesse, so steht jetzt nur der Fall zurück, dass die eine der Grössen ξ und η verschwindet, während die zweite von Null verschieden ist. Sei z. B.

$$\xi=0,\quad \eta \gtrless 0.$$

Alsdann können wir immer durch Einführung einer zweckmässigen Funktion von y als neues y erreichen, dass $\eta=1$ wird. Also gehen die Gleichungen (5) in

$$\frac{dw}{dy}=\varphi(y)=f(x)=A$$

über; woraus

$$w = Ay + f(x), \quad e^w = Y(y) . X(x).$$

Dies ist aber eine *developpable* Fläche.

5. Die Gleichungen (5) sind einer eleganten Interpretation fähig, wie ich jetzt zeigen werde. Aus (5) folgt zunächst

$$\varphi(y) - \frac{d\xi}{dx} = f(x) - \frac{d\eta}{dy},$$

woraus, indem ich mit B eine Constante bezeichne,

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi(y) = B - \dfrac{d\eta}{dy}, \\ f(x) = B - \dfrac{d\xi}{dx}. \end{cases}$$

Dies vorausgesetzt, denke ich mich auf die Gleichung

$$(7) \qquad ds^2 = e^w\, dx\, dy$$

unsere inf. Transformation ausgeführt. Es kommt

$$\frac{\delta}{\delta t}(ds^2) = e^w\left(\frac{dw}{dx}\xi + \frac{dw}{dy}\eta\right) dx\, dy + e^w \frac{\delta}{\delta t}(dx\, dy);$$

nun aber ist

$$\frac{\delta}{\delta t}(dx\, dy) = d\left(\frac{\delta x}{dt}\right) dy + dx\, .\, d\left(\frac{\delta y}{dt}\right) = d\xi\, dy + dx\, d\eta;$$

also wird

$$\frac{\delta}{\delta t}(ds^2) = e^w .\, dx\, dy\left(\frac{dw}{dx}\xi + \frac{dw}{dy}\eta + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right)$$

woraus durch Berücksichtigung von (5) (6) und (7)

$$\frac{\delta}{\delta t}(ds^2) = B\, ds^2$$

oder

$$\frac{\delta}{\delta t}(ds) = \frac{B}{2}\, ds.$$

Durch unsere inf. Transformation werden daher alle Längen nach demselben Verhältnisse geändert).*

---

*) Es ist übrigens äusserst einfach diesen Satz durch synthetische Betrachtungen zu beweisen und gleichzeitig auf n Dimensionen auszudehnen. Durch unsere inf. Transformation gehen nehmlich alle ∞^1 durch einen Punkt gehenden geodätischen Curven in eine ebensolche Curven-Schaar über. Und da die Transformation conform sein soll, so geht jeder geodätischer Kreis, der die vorgelegte Curven-Schaar orthogonal schneidet, in einen geodätischen Kreis über. Aber hieraus folgt unser Satz als Corollar.

In früheren Abhandlungen (z. B. Math. Ann. Bd. 5, pg. 204, 1872) beschäftigte ich mich gelegentlich mit Flächen, die eine beliebige, gleichzeitig lineare und conforme, infinitesimale Punkt-Transformation gestatteten. Ich zeigte, dass die Haupttangentencurven und die Krümmungslinien dieser Flächen, die sowohl die Rotationsflächen wie die Schraubenflächen als specielle Fälle umfassen, bestimmt werden können. Ich zeigte ferner, dass die Bestimmung der geodätischen Curven dieser Flächen, die ich *Spiralflächen* genannt habe, nur die Integration einer gewöhnlichen Differential-Gleichung *erster* Ordnung verlangt.

Es ist nach dem Vorangehenden einleuchtend, dass das Bogenelement einer jeden Spiralfläche, wie auch jeder auf eine Spiralfläche abwickelbaren Fläche die Form

$$ds^2 = e^{ax} \Phi(x - y)$$

besitzt. Andererseits ist auch nicht schwer zu erkennen, das jede Fläche, deren Bogenelement diese Form besitzt, auf eine Spiralfläche abgewickelt werden kann. Da indess Herr M. *Levy* (Comptes rendus 18 November 1878), wie ich während des Druckes dieser Abhandlung bemerke, soeben diesen letzten Satz bewiesen hat, kann ich mich darauf beschräncken, auf die citirte Note, die ausserdem einen anderen eleganten Satz enthält, zu verweisen*).

§ 3.

Erledigung des Falles $\frac{d\xi}{dy} = 0$, $\frac{d\eta}{dx} \gtrless 0$. *Die zweite Flächen-Classe.*

Wir erledigen jetzt die Hypothese

$$\frac{d\xi}{dy} = 0, \quad \frac{d\eta}{dx} \gtrless 0.$$

Indem wir zweckmässige Funktionen $x'(x)$ und $y'(y)$ als neues x und neues y einführen, erreichen wir, dass die unserer Hypothese entsprechenden Flächen keine arbiträre Funktion sondern nur gewisse Constanten enthalten. Wir bestimmen alle diese Flächen.

6. Die Bedingungs-Gleichungen (4) reduciren sich in unserem Falle auf die drei Gleichungen

*) **Man erhält die allgemeinste Minimalfläche, deren geodätische Curven eine conforme infinitesimale Transformation gestatten, wenn man setzt**

$$F(s) = (C_1 + C_2 i)\, s^{m_1 + m_2 i}$$

Man erhält eine solche Fläche, indem man diejenige Minimalfläche bestimmt, die eine logarithmische Spirale als geodätische Curve oder als Krümmungslinie enthält.

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\eta}{dx^2}-\frac{d\eta}{dx}\frac{dw}{dx}=0,\\ &2\frac{d^2\eta}{dx\,dy}-\frac{d^2\xi}{dx^2}-\xi\frac{d^2w}{dx^2}-\eta\frac{d^2w}{dx\,dy}+2\frac{d\eta}{dx}\frac{dw}{dy}-\frac{dw}{dx}\frac{d\xi}{dx}=0,\\ &\frac{d^2\eta}{dy^2}+\xi\frac{d^2w}{dx\,dy}+\eta\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{dw}{dy}\frac{d\eta}{dy}=0.\end{aligned}\right.$$

Die erste giebt

$$(11)\qquad Y(y)\frac{d\eta}{dx}=e^w,$$

wo Y verschieden von Null sein muss; die dritte giebt

$$(12)\qquad \frac{d\eta}{dy}+\xi\frac{dw}{dx}+\eta\frac{dw}{dy}=f(x).$$

Um die zweite zu integriren, bemerken wir, dass diese Gleichung folgendermassen geschrieben werden kann

$$\frac{d}{dx}\left(2\frac{d\eta}{dy}-\frac{d\xi}{dx}-\xi\frac{dw}{dx}-\eta\frac{dw}{dy}\right)+3\frac{d\eta}{dx}\frac{dw}{dy}=0.$$

Nun aber ist wegen (11)

$$Y'\frac{d\eta}{dx}+Y\frac{d^2\eta}{dx\,dy}=e^w\frac{dw}{dy}=Y\frac{d\eta}{dx}\frac{dw}{dy};$$

also kommt

$$\frac{d}{dx}\left(5\frac{d\eta}{dy}-\frac{d\xi}{dx}-\xi\frac{dw}{dx}-\eta\frac{dw}{dy}+3\frac{Y'}{Y}\eta\right)=0,$$

woraus

$$(13)\qquad 5\frac{d\eta}{dy}-\frac{d\xi}{dx}-\xi\frac{dw}{dx}-\eta\frac{dw}{dy}+3\frac{Y'}{Y}\eta=\varphi(y).$$

Ehe wir weiter gehen, zeigen wir, dass Y durch zweckmässigen Coordinatenwahl gleich 1 wird. Sei in der That y' das neue y, während das alte x behalten wird. Alsdann ist

$$e^w=e^{w'}\frac{dy'}{dy},$$

$$\frac{dy}{dt}=\eta=\frac{dy}{dy'}\frac{dy'}{dt}=\frac{dy}{dy'}\eta',$$

$$\frac{d\eta}{dx}=\frac{dy}{dy'}\frac{d\eta'}{dx};$$

und also giebt (11):

$$Y(y)\frac{dy}{dy'}\frac{d\eta'}{dx}=e^{w'}\frac{dy'}{dy}$$

oder

$$Y(y)\left(\frac{dy}{dy'}\right)^2\frac{d\eta'}{dx}=e^{w'}.$$

Bestimmt man daher y' durch die Gleichung

$$dy' = \sqrt{Y} \,.\, dy,$$

so kommt

$$\frac{d\eta'}{dx} = e^{w'}.$$

Hieraus folgt sogleich, dass man in den Gleichungen (11) (12) (13) ohne wesentliche Beschränckung $Y = 1$ setzen kann. Und also ist die gesuchte Flächen-Classe bestimmt durch die drei Gleichungen

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\eta}{dx} = e^{w}, \\ &\frac{d\eta}{dy} + \xi \frac{dw}{dx} + \eta \frac{dw}{dy} = f(x), \\ 5 &\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx} - \xi \frac{dw}{dx} - \eta \frac{dw}{dy} = \varphi(y), \end{aligned} \right.$$

die wir noch einmal integriren werden. Hierbei können zwei verschiedene Fälle eintreten, die wir separat behandeln müssen.

7. Ist $\xi \gtrless 0$, so können wir immer die Grösse x derart wählen, dass $\xi = 1$ wird. Alsdann nehmen die Gleichungen (14) die Form

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\eta}{dx} = e^{w}, \\ &\frac{d\eta}{dy} + \frac{dw}{dx} + \eta \frac{dw}{dy} = f(x), \\ 5 &\frac{d\eta}{dy} - \frac{dw}{dx} - \eta \frac{dw}{dy} = \varphi(y), \end{aligned} \right.$$

woraus

$$(15') \qquad 6 \frac{d\eta}{dy} = f(x) + \varphi(y) = f(x) + \pi'(y)$$

und durch Integration

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} 6\,\eta &= y f(x) + \pi(y) + F(x), \\ 6\,e^{w} &= y f'(x) + F'(x). \end{aligned} \right.$$

Nun aber ist (15,2)

$$\left(\frac{d\eta}{dy} - f\right) e^{w} + \frac{d}{dx}(e^{w}) + \eta \frac{d}{dy}(e^{w}) = 0,$$

also kommt

$$(f + \pi' - 6f)(yf' + F') + 6(yf'' + F'') + f'(yf + \pi + F) = 0,$$

oder

$$(17) \qquad (yf' + F')\pi' + f'\pi + y(6f'' - 4ff') + (6F'' - 5fF' + f'F) = 0$$

oder endlich

$$\frac{d}{dy}\left[(yf'+F')\pi\right]+y(6f''-4ff')+(6F''-5fF'+f'F)=0,$$

woraus durch Integration

$$(yf'+F')\pi+y^2(3f''-2ff')+y(6F''-5fF'+f'F)+\Phi(x)=0,$$

$$\pi(y)=\frac{y^2(2ff'-3f'')+y(-6F''+5fF'-f'F)-\Phi(x)}{yf'+F'},$$

so dass $\pi(y)$ jedenfalls die Form

$$\pi(y)=c_1y+c_2+\frac{c(x)}{yf'+F'},$$

besitzt, wobei c_1 und c_2 Constanten sind. Ist nun $c(x)\gtrless 0$, so muss, da π von x unabhängig sein soll,

$$\frac{c(x)}{f'(x)}=\text{Const.}=L,\quad \frac{c(x)}{F'(x)}=\text{Const.}=M$$

sein. In diesem Falle wird (16,2)

$$6e''=c(x)\left(\frac{y}{L}+\frac{1}{M}\right),$$

sodass die betreffende Fläche *developpabel* sein muss. *Indem wir daher von den developpablen Flächen wegsehen,* können wir setzen

(16′)
$$\begin{cases}\pi(y)=c_1y+c_2,\\ 6\eta=yf(x)+c_1y+c_2+F(x).\end{cases}$$

Hierdurch geht (17) über in

$$(yf'+F')c_1+f'(c_1y+c_2)+y(6f''-4ff')+(6F''-5fF'+f'F)=0,$$

woraus

(18)
$$\begin{cases}6f''-4ff'+2c_1f'=0,\\ 6F''-5fF'+f'F+c_1F'+c_2f'=0.\end{cases}$$

Um diese Gleichungen zu integriren, zetzen wir

$$f-\frac{c_1}{2}=f_1,\quad F+c_2=F_1,$$

woraus

(19)
$$\begin{cases}3f_1''-2f_1f_1'=0,\\ 6F_1''-5fF_1'+f'F_1+c_1F_1'=0.\end{cases}$$

Die erste Gleichung giebt

$$3f_1'=f_1^2+a^2,$$

woraus, wenn $a\gtrless 0$, folgt

$$f_1=a\,.\,tg\,\frac{a(x+b)}{3}=f-\frac{c_1}{2}$$

während, wenn $a=0$, folgt

$$f_1 = \frac{-3}{x+b} = f - \frac{c_1}{2}.$$

Um jetzt die Gleichung

$$6F_1''' - 5fF_1' + f'F_1 + c_1F_1' = 0$$

zu integriren, bemerken wir, dass $F_1 = f + c_1$ wegen (18,1) ein particuläres Integral derselben ist. Daher setzen wir

$$F_1 = (f + c_1)\,\Omega(x),$$

und erhalten zur Bestimmung von Ω:

$$6\frac{d\Omega'}{\Omega'} + (c_1 - 5f)\,dx + 12\frac{df}{f+c_1} = 0,$$

woraus, wenn $a \gtrless 0$, durch Division mit 3:

$$2\frac{d\Omega'}{\Omega'} - \frac{1}{2}c_1\,dx - 5\,\mathrm{tg.}\frac{a(x+b)}{3}\cdot\frac{a\,dx}{3} + 4\frac{df}{f+c_1} = 0,$$

und durch Integration

$$\Omega'^2 = A e^{\frac{c_1 x}{2}} \cos^{-5}\frac{a(x+b)}{3}\cdot\left(3\frac{c_1}{2} + a.\mathrm{tg.}\frac{a(x+b)}{3}\right)^{-4}.$$

Eine Quadratur giebt darnach Ω.

Ist $a=0$, so kommt

$$2\frac{d\Omega'}{\Omega'} - \frac{1}{2}c_1\,dx + 5\frac{dx}{x+b} + 4\frac{df}{f+c_1} = 0,$$

woraus

$$\Omega'^2 = A e^{\frac{c_1 x}{2}} (x+b)^{-5}\left(\frac{3}{2}c_1 - \frac{3}{x+b}\right)^{-4},$$

sodass Ω' auch jetzt durch eine Quadratur gefunden wird.

Hiermit sind alle Flächen, die der Annahme

$$\frac{d\xi}{dy} = 0,\quad \frac{d\eta}{dx} \gtrless 0,\quad \xi \gtrless 0$$

entsprechen, bestimmt. Wir werden später insbesondere auch diejenigen hierher gehörigen Flächenfamilien bestimmen, welche reelle Flächen liefern*).

---

*) Soll die Fläche $e^w = yf' + F'$ constantes Krümmungsmaass haben, so muss bekanntlich

$$\frac{(yf' + F')f'' - (yf'' + F'')f'}{(yf' + F')^3} = \mathrm{Const.}$$

sein. Dies giebt $F'f'' - F''f'$, woraus $AF' + Bf' = 0$, was nur developpable Flächen liefert.

8. Es steht zurück, diejenigen Flächen zu bestimmen, welche der Annahme

$$\frac{d\eta}{dx} \gtrless 0, \quad \xi = 0$$

entsprechen. In diesem Falle nehmen die Gleichungen (14) die Form

$$\frac{d\eta}{dx} = e^{w},$$

$$\frac{d\eta}{dy} + \eta\frac{dw}{dy} = f(x),$$

$$5\frac{d\eta}{dy} - \eta\frac{dw}{dy} = \varphi(y) = \pi'(y),$$

woraus

$$6\frac{d\eta}{dy} = f(x) + \pi'(y),$$

$$6\eta = yf(x) + \pi(y) + F(x),$$

und

$$6\frac{d\eta}{dx} = 6e^{w} = yf'(x) + F'(x).$$

Diese Werthe eingesetzt in die Gleichung

$$\left(\frac{d\eta}{dy} - f\right)e^{w} + \eta\frac{d}{dy}(e^{w}) = 0$$

geben

(20)
$$(\pi' - 5f)(yf' + F') + (yf + \pi + F)f' = 0,$$
$$\frac{d}{dy}[(yf' + F')\pi] - 4ff'y - 5fF' + Ff' = 0,$$
$$\pi(y) = c_1 y + c_2 + \frac{c(x)}{yf' + F'},$$

wo wir wie in der vorangehenden Nummer erkennen, dass die Annahme $c(x) \gtrless 0$ nur developpable Flächen liefert. Also können wir setzen

$$\pi(y) = c_1 y + c_2,$$

sodass (20) die folgende Gestalt annimmt

$$(c_1 - 5f)(yf' + F') + (yf + c_1 y + c_2 + F)f' = 0,$$

woraus

$$(2c_1 - 4f)f' = 0,$$

sodass $f = A =$ Const. wird. Also wird e^{w} eine Function allein von x. Und folglich liefert die Annahme $\xi = 0$ nur *developpable* Flächen.

§ 4.

Der Fall $\frac{d\xi}{dy} \gtrless 0$, $\frac{d\eta}{dx} \gtrless 0$. *Die dritte Flächen-Classe.*

Ich behandle jetzt den Fall

$$\frac{d\xi}{dy} \gtrless 0,\quad \frac{d\eta}{dx} \gtrless 0$$

und zeige, dass man immer die Coordinaten x und y derart wählen kann, dass e^w die bemerkenswerthe Form

$$e^w = \psi(x+y) + \Psi(x-y)^{*)}$$

erhält. Dabei sind die Grössen ψ und Ψ, deren jede nur von einem Argumente abhängt, bestimmt durch gewöhnliche Differential-Gleichungen, die ich allerdings nicht integriren kann, während ich mehrere bemerkenswerthe Particularlösungen gefunden habe.

9. Die Bedingungs-Gleichungen (4)

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2\eta}{dx^2} - \dfrac{d\eta}{dx}\dfrac{dw}{dx} = 0, \\ \dfrac{d^2\xi}{dy^2} - \dfrac{d\xi}{dy}\dfrac{dw}{dy} = 0, \\ 2\dfrac{d^2\eta}{dx\,dy} - \dfrac{d^2\xi}{dx^2} - \xi\dfrac{d^2w}{dx^2} - \eta\dfrac{d^2w}{dx\,dy} + 2\dfrac{d\eta}{dx}\dfrac{dw}{dy} - \dfrac{dw}{dx}\dfrac{d\xi}{dx} = 0, \\ -2\dfrac{d^2\xi}{dx\,dy} + \dfrac{d^2\eta}{dy^2} + \xi\dfrac{d^2w}{dx\,dy} + \eta\dfrac{d^2w}{dy^2} - 2\dfrac{d\xi}{dy}\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{dw}{dy}\dfrac{d\eta}{dy} = 0, \end{array}\right.$$

gestatten auch jetzt eine erste Integration. Die beiden ersten Gleichungen geben nehmlich

$$(21)\qquad Y(y)\frac{d\eta}{dx} = e^w = X(x)\frac{d\xi}{dy},$$

wo, wie wir zeigen werden, X und Y gleich 1 gesetzt werden können.

Wir führen neue Variable x' und y' ein. Es ist

$$\xi = \frac{dx}{dx'}\frac{\delta x'}{\delta t} = \frac{dx}{dx'}\xi',$$

$$\eta = \frac{dy}{dy'}\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{dy}{dy'}\eta';$$

*) *Liouville* hat bekanntlich gezeigt, dass die geodätischen Curven einer Fläche, deren Bogenelement auf die Form

$$ds^2 = [\psi(x+y) + \Psi(x-y)]\,dx\,dy$$

gebracht ist, bestimmt werden können. (Vergleiche *Liouvilles* Ausgabe von *Monge's* Applications d'analyse à la Géométrie p. 579).

also kommt

$$X\frac{d\xi}{dy}=X\frac{dx}{dx'}\,\frac{d\xi'}{dy'}\,\frac{dy'}{dy}\,,\quad Y\frac{d\eta}{dx}=Y\frac{dy}{dy'}\,\frac{d\eta'}{dx'}\,\frac{dx'}{dx}\,,$$

$$e^{w}=e^{w'}\frac{dx'}{dx}\,\frac{dy'}{dy}\,,$$

und also nimmt (21) die Form

$$X\frac{dx}{dx'}\,\frac{d\xi'}{dy'}\,\frac{dy'}{dy}=e^{w'}\frac{dx'}{dx}\,\frac{dy'}{dy}=Y\frac{dy}{dy'}\,\frac{d\eta'}{dx'}\,\frac{dx'}{dx}\,.$$

Wählt man daher x' und y' derart, dass

$$dx'=\sqrt{X}\,dx,\quad dy'=\sqrt{Y}\,dy,$$

so kommt, wenn wir statt x' und y' bez. x und y schreiben,

(21′)
$$\frac{d\eta}{dx}=e^{w}=\frac{d\xi}{dy}\,,$$

und

$$\frac{d^2\eta}{dx\,dy}=e^{w}\frac{dw}{dy}=\frac{d\eta}{dx}\,\frac{dw}{dy}\,,\quad \frac{d^2\xi}{dx\,dy}=e^{w}\frac{dw}{dx}=\frac{d\xi}{dy}\,\frac{dw}{dx}\,.$$

Hierdurch nehmen die beiden letzten Bedingungs-Gleichungen (4) die Form

$$\frac{d}{dx}\left(5\frac{d\eta}{dy}-\frac{d\xi}{dx}-\xi\frac{dw}{dx}-\eta\frac{dw}{dy}\right)=0,\quad \frac{d}{dy}\left(-5\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\xi\frac{dw}{dx}+\eta\frac{dw}{dy}\right)=0,$$

woraus durch Integration

(22)
$$5\frac{d\eta}{dy}-\frac{d\xi}{dx}-\xi\frac{dw}{dx}-\eta\frac{dw}{dy}=\lambda(y),\quad -5\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\xi\frac{dw}{dx}+\eta\frac{dw}{dy}=f(x).$$

Die vereinigten Gleichungen (21) und (22) sind aequivalent mit den Gleichungen (4).

Die Gleichungen (21′) zeigen, dass man setzen kann

$$\xi=\frac{dU}{dx}\,,\quad \eta=\frac{dU}{dy}\,,\quad e^{w}=\frac{d^2U}{dx\,dy}\,,$$

und zwar ist hierbei die Bestimmung unserer Flächen-Classe reducirt auf die Bestimmung der Funktion U. Durch Addition der Gleichungen (22) kommt

$$6\left(\frac{d\eta}{dy}-\frac{d\xi}{dx}\right)=f(x)+\lambda(y),$$

$$6\left(\frac{d^2U}{dy^2}-\frac{d^2U}{dx^2}\right)=f(x)+\lambda(y).$$

Folglich besitzt U die Form

$$U=\varphi(x+y)+\Phi(x-y)+X(x)+Y(y),$$

und es wird

(23)
$$\xi=\varphi'+\Phi'+X',\quad \eta=\varphi'-\Phi'+Y',\quad e^{w}=\varphi''-\Phi''.$$

Es steht somit nur zurück, die vier Funktionen φ, Φ, X, Y, deren jede nur von *einem* Argumente abhängt, zu bestimmen. Zu diesem Zwecke substituiren wir die Werthe (23) in (22), wodurch kommt

$$(22')\quad \left\{\begin{aligned} 4(\varphi''+\Phi'')+5Y''-X''-\frac{(\varphi'''-\Phi''')(\varphi'+\Phi'+X')+(\varphi'''+\Phi''')(\varphi'-\Phi'+Y')}{\varphi''-\Phi''}&=\lambda(y),\\ -4(\varphi''+\Phi'')-5X''+Y''+\frac{(\varphi'''-\Phi''')(\varphi'+\Phi'+X')+(\varphi'''+\Phi''')(\varphi'-\Phi'+Y')}{\varphi''-\Phi''}&=f(x),\end{aligned}\right.$$

woraus durch Addition

$$6Y''-6X''=\lambda(y)+f(x)$$

und

$$(22'')\qquad 6Y''=\lambda(y)+A,\quad 6X''=A-f(x),\qquad (A=\text{Const.})$$

womit die Grössen $\lambda(y)$ und $f(x)$ bestimmt sind. Hierdurch reduciren die beiden Gleichungen (22′) sich auf die einzige Gleichung

$$(24)\quad 0=A+4(\varphi''+\Phi'')-(X''+Y'')-\frac{2\varphi'\varphi'''-2\Phi'\Phi'''+X'(\varphi'''-\Phi''')+Y'(\varphi'''+\Phi''')}{\varphi''-\Phi''},$$

die die vier Funktionen φ, Φ, X, Y bestimmt.

Es ist mir nicht gelungen, diese Gleichung in erschöpfender Weise zu behandeln, während ich mehrere bemerkenswerthe particulare Lösungen durch specielle Methoden gefunden habe. Ich erinnere im Uebrigen daran, dass man aus (24) durch Differentiation und Elimination von drei unter den vier unbekannten Funktionen eine *gewöhnliche* Differential-Gleichung zur Bestimmung der vierten Funktion herleiten kann. (Man vergleiche Abels Werke, Bd. I., pg. 1, der neuen balderscheinenden Ausgabe).

10. Eine ziemlich allgemeine Lösung von (24) erhält man, indem man setzt

$$X'=\alpha x,\quad Y'=\alpha y,$$

wo α eine Constante ist. Hierdurch nimmt (24) die Form

$$(A-2\alpha)\varphi''+4\varphi''^2-2\varphi'\varphi'''-\alpha(x+y)\varphi'''-(A-2\alpha)\Phi''-4\Phi''^2+2\Phi'\Phi'''+\alpha(x-y)\Phi'''=0,$$

und zerlegt sich daher in die beiden Gleichungen

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} B+(A-2\alpha)\varphi''+4\varphi''^2-2\varphi'\varphi'''-\alpha(x+y)\varphi'''&=0,\\ B+(A-2\alpha)\Phi''+4\Phi''^2-2\Phi'\Phi'''-\alpha(x-y)\Phi'''&=0,\end{aligned}\right.$$

wo B eine arbiträre Constante bezeichnet.

Um diese Gleichungen, die dieselbe Form bezitzen, zu integriren, setze ich

$$\varphi'+\frac{\alpha}{2}(x+y)=\psi';\quad \Phi'+\frac{\alpha}{2}(x-y)=\Psi',$$

woraus

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \left(B-\frac{\alpha A}{2}+2\alpha^2\right)+(A-6\alpha)\psi''+4\psi''^2-2\psi'\psi'''&=0,\\ \left(B-\frac{\alpha A}{2}+2\alpha^2\right)+(A-6\alpha)\Psi''+4\Psi''^2-2\Psi'\Psi'''&=0.\end{aligned}\right.$$

Es handelt sich also darum eine Gleichung der Form

$$L + M\psi'' + 4\psi''^2 - 2\psi'\psi''' = 0$$

zu integriren. Ich setze $\psi' = z$, $\psi'' = u$ und betrachte u als eine unbekannte Funktion von z. Es ist $\psi''' = u\,\frac{du}{dz}$, und also kommt

$$L + Mu + 4u^2 = 2\,z\,u\,\frac{du}{dz},$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{2u\,du}{L + Mu + 4u^2},$$

welche Gleichung sich unmittelbar integriren lässt. Hierdurch wird ψ'' bestimmt als Funktion von ψ', etwa $\psi'' = F(\psi')$; also kommt

$$\frac{d\psi'}{F(\psi')} = d(x+y),$$

womit ψ' bestimmt ist. Hiernach findet man ψ'' durch Differentiation. Wenn die Constanten L und M allgemeine Werthe haben, so würde die zwischen ψ' und ψ'' gefundene Relation sich nicht auflösen lassen. Es ist indess möglich diese Schwierigkeit zu vermeiden, worauf ich jedoch nicht näher eingehe.

Man sieht somit, dass die Annahme $X' = \alpha x$, $Y' = \alpha y$ wirklich eine hierher gehörige Flächen-Categorie liefert, die sich durch Quadratur bestimmen lässt. Es ist übrigens leicht zu erkennen, dass man ohne Beschränckung $\alpha = 0$ setzen darf.

Zu bemerken ist, dass man eine beliebige Lösung ψ' von (26,1) mit einer beliebigen Lösung Ψ' von (26,2) verbinden kann. Insbesondere kann man $\Psi'' = K = \text{Const.}$ setzen, indem diese Annahme wirklich (26,2) identisch befriedigt. Die entsprechenden Flächen sind Rotationsflächen, deren geodätische Curven somit zwei infinitesimale Transformationen gestatten.

Es wird sich später (§ 5, N⁰ 12) ergeben, dass die hiermit gefundenen Flächen eine wohl definirte Unterabtheilung der dritten Classe bilden. Später bestimmen wir einige weitere Flächenfamilien, die der dritten Classe angehören, und welche sich dadurch charakterisiren lassen, dass sie zugleich der ersten oder zweiten Classe angehören.

§ 5.

Bestimmung der geodätischen Curven.

Wenn die geodätischen Curven einer Fläche eine oder mehrere inf. Transformationen gestatten, so vereinfacht sich immer die Bestimmung der geodätischen Curven. Gehört insbesondere die Fläche meiner zweiten oder meiner dritten Flächen-Classe, so verlangt jene Bestimmung nur Differentiation und Quadratur, in gewissen merkwürdigen Fällen sogar nur *Differentiation.*

Indem ich nun dies nachweisen werde, setze ich der Kürze wegen voraus, dass das Bogenelement schon auf die Form $ds^2 = e^w dx\,dy$ gebracht ist, dass also die Differential-Gleichung 1. O. $ds^2 = 0$ schon integrirt ist. Ich bemerke aber ausdrücklich, dass diese Voraussetzung unnothwendig ist; wie ich bei einer anderen Gelegenheit nachweisen werde*).

11. Nach *Jacobi* kennt man einen Multiplicator

$$M = e^{\frac{w}{2}} y'^{-\frac{3}{2}}$$

der linearen partiellen Differential-Gleichung der geodätischen Curven

$$A(f) = 0 = \frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} + \left(y'\frac{dw}{dx} - y'^2\frac{dw}{dy}\right)\frac{df}{dy'}.$$

Kennt man nun zugleich eine inf. Transformation $B(f) = \xi\frac{df}{dx} + \eta\frac{df}{dy} + \psi\frac{df}{dy'}$, die die Gleichung $A(f) = 0$ invariant lässt:

$$A(B(f)) - B(A(f)) = \lambda\, A(f),$$

so ist nach meinen Untersuchungen (Math. Ann. Bd. XI., pg. 508) der Ausdruck

$$I = B(\log M) + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\psi}{dy'} - \lambda$$

entweder eine Constante oder aber eine Lösung von $A(f) = 0$. Ebenso ist $B(I)$ entweder eine Constante oder eine Lösung von $A(f) = 0$.

Es ist (Nummer 1)

$$\psi = \frac{d\eta}{dx} + y'\frac{d\eta}{dy} - y'\frac{d\xi}{dx} - y'^2\frac{d\xi}{dy}, \quad \lambda = \frac{d\xi}{dx} + y'\frac{d\xi}{dy}, \quad \log M = \frac{1}{2}w - \frac{3}{2}\log y',$$

$$B(\log M) = \frac{1}{2}\left(\xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy}\right) - \frac{3}{2}\,\frac{1}{y'}\left(\frac{d\eta}{dx} + y'\frac{d\eta}{dy} - y'\frac{d\xi}{dx} - y'^2\frac{d\xi}{dy}\right)$$

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\psi}{dy'} = 2\frac{d\eta}{dy} - 2y'\frac{d\xi}{dy};$$

und also kommt

$$2I = \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\xi}{dx} - 3y'\frac{d\xi}{dy} - 3\,\frac{1}{y'}\,\frac{d\eta}{dx}, \tag{27}$$

welche Grösse offenbar nur dann eine Constante sein kann, wenn gleichzeitig: $\frac{d\xi}{dy} = 0$, $\frac{d\eta}{dx} = 0$ ist. Bestehen diese beiden Gleichungen, so ist

---

*) Wenn andererseits eine Fläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist, so genügt eine Quadratur zur Bestimmung ihrer geodätischen Curven, auch dann wenn die Gleichung $ds^2 = 0$ nicht schon integrirt ist. Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, dass die Fläche nicht von constantem Krümmungsmaase ist.

$$2I = \xi \frac{dw}{dx} + \eta \frac{dw}{dy} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\xi}{dx},$$

und dieser Ausdruck ist nach den Gleichungen (5) und (6) wirklich eine Constante.

12. Wenn also unsere Fläche der zweiten oder dritten Classe angehört, so findet man eine Lösung $2I$ durch *Differentiation.* Es ist leicht nachzuweisen, dass man in gewissen Fällen eine weitere Lösung durch Differentiation herleiten kann.

Ich setze

$$I_1 = \frac{2}{3} I = \frac{1}{3}\left(\xi \frac{dw}{dx} + \eta \frac{dw}{dy} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\xi}{dx}\right) - \frac{d\xi}{dy} y' - \frac{d\eta}{dx} \frac{1}{y'},$$

$$I_1 = \alpha - \beta y' - \gamma \frac{1}{y'},$$

und bilde den Ausdruck $B(I_1)$, der entweder eine Lösung oder aber eine Constante sein soll. Es ist

$$B(I_1) = B(\alpha) - B(\beta) y' - B(\gamma) \frac{1}{y'} - \left(\beta - \gamma \frac{1}{y'^2}\right)\left(\frac{d\eta}{dx} + y' \frac{d\eta}{dy} - y' \frac{d\xi}{dx} - y'^2 \frac{d\xi}{dy}\right)$$

woraus

$$B(I_1) = B(\alpha) - \beta \frac{d\eta}{dx} - \gamma \frac{d\xi}{dy} - y'\left(B(\beta) + \beta \frac{d\eta}{dy} - \beta \frac{d\xi}{dx}\right) - \frac{1}{y'}\left(B(\gamma) - \gamma \frac{d\eta}{dy} + \gamma \frac{d\xi}{dx}\right)$$
$$+ y'^2 \beta \frac{d\xi}{dy} + \frac{1}{y'^2} \gamma \frac{d\eta}{dx}.$$

Um zu entscheiden, ob dieser Ausdruck, der nur dann eine Constante sein kann, wenn gleichzeitig die Grössen $\frac{d\xi}{dy} = \beta$ und $\frac{d\eta}{dx} = \gamma$ verschwinden, eine von I_1 unabhängige Lösung darstellt, bilden wir den Ausdruck

$$B(I_1) - I_1^2 = I_2,$$

der wiederum eine Lösung ist. Es ist

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} I_2 = B(\alpha) - \beta \frac{d\eta}{dx} - \gamma \frac{d\xi}{dy} - \alpha^2 - 2\beta\gamma - y'\left(B(\beta) + \beta \frac{d\eta}{dy} - \beta \frac{d\xi}{dx} - 2\alpha\beta\right) \\ - \frac{1}{y'}\left(B(\gamma) - \gamma \frac{d\eta}{dy} + \gamma \frac{d\xi}{dx} - 2\alpha\gamma\right). \end{aligned} \right.$$

Ehe wir weiter gehen, werden wir annehmen, dass die Fläche der *dritten* Classe angehört. Alsdann ist $\beta = \gamma = e^w = \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\xi}{dy}$, und also kommt

$$I_2 = B(\alpha) - 4\beta^2 - \alpha^2 - \left(y' + \frac{1}{y'}\right)(B(\beta) - 2\alpha\beta) - \left(y' - \frac{1}{y'}\right)\beta\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right);$$

andererseits ist in diesem Falle

$$I_1 = \alpha - \left(y' + \frac{1}{y'}\right)\beta, \quad \beta \gtrless 0.$$

Ist daher die Grösse $\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}$ verschieden von Null, so ist I_2 unabhängig von I_1, so dass wir in diesem Falle *zwei* Lösungen durch *Differentiation* erhalten.

Ist dagegen (vergl. hier und im Folgenden § 4)

$$\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx} = 0 = Y''(y) - X''(x); \quad Y'' = X'' = a = \text{Const.},$$

so ist

$$\begin{aligned} B(\beta) - 2\alpha\beta = {} & B(e^w) - \frac{2}{3}\left(\xi \frac{dw}{dx} + \eta \frac{dw}{dy} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\xi}{dx}\right) e^w \\ = {} & B(e^w) - \frac{2}{3} B(w) . e^w - \frac{2}{3}\left(2(\varphi'' + \Phi'') + X'' + Y''\right) e^w \\ = {} & \frac{1}{3} B(e^w) - \frac{4}{3}(\varphi'' + \Phi'') e^w - \frac{4}{3} a e^w. \end{aligned}$$

Und da Formel (24) durch die Substitution $X'' = Y'' = a$, indem man zugleich mit der Grösse $e^w = \varphi'' - \Phi''$ multiplicirt, die Gestalt

$$(A - 2a)(\varphi'' - \Phi'') + 4(\varphi'' - \Phi'')(\varphi'' + \Phi'') - B(e^w) = 0$$

erhält, so kommt

$$B(\beta) - 2\alpha\beta = \frac{A - 6a}{3}(\varphi'' - \Phi'') = \frac{A - 6a}{3}\beta,$$

woraus

$$I_2 = B(\alpha) - 4\beta^2 - \alpha^2 - \left(y' + \frac{1}{y'}\right)\frac{A - 6a}{3}\beta,$$

$$I_2 - \frac{A - 6a}{3} I_1 = B(\alpha) - 4\beta^2 - \alpha^2 - \frac{A - 6a}{3}\alpha = f(xy).$$

Die Lösung $I_2 - \frac{A - 6a}{3} I_1$ enthält nach ihrer Form jedenfalls nur die Grössen x und y, und muss somit eine absolute Constante sein. Hiermit ist nachgewiesen, dass *die Grössen I_1 und I_2 für eine Fläche der dritten Classe nur dann unabhängige Lösungen sind, wenn die Grösse $\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}$ von Null verschieden ist.*

Lass uns jetzt annehmen, dass unsere Fläche der *zweiten* Classe angehört, und lass uns untersuchen, ob I_1 und I_2 in diesem Falle unabhängig sind oder nicht sind. Jetzt wird

$$I_1 = \alpha - \frac{1}{y'}\gamma, \quad \gamma = e^w, \quad I_2 = B(\alpha) - \alpha^2 - \frac{1}{y'}\left(B(\gamma) - \gamma\frac{d\eta}{dy} + \gamma\frac{d\xi}{dx} - 2\alpha\gamma\right).$$

Es fragt sich, ob der Ausdruck $I_2 - K I_1$ bei passendem Wahle der Constante K identisch gleich einer Constanten werden kann. Es ist

$$B(\gamma) - \gamma\frac{d\eta}{dy} + \gamma\frac{d\xi}{dx} - 2\alpha\gamma = \frac{1}{3}B(e^w) - \frac{5}{3}e^w\frac{d\eta}{dy} + \frac{1}{3}e^w\frac{d\xi}{dx}.$$

Andererseits ist wegen (14) (15′) (16′)

$$B(w) - 5\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\xi}{dx} = -\varphi(y) = -c_1 = \text{Const.};$$

also kommt

$$B(\gamma) - \gamma\frac{d\eta}{dy} + \gamma\frac{d\xi}{dx} - 2\alpha\gamma = -\frac{c_1}{3}e^w = -\frac{c_1}{3}\gamma.$$

Hieraus folgt die Existenz einer Relation der Form

$$I_2 + \frac{c_1}{3}I_1 = f(xy)$$

wo die Grösse f, die eine Lösung sein soll, eine absolute Constante sein muss. *Für eine Fläche zweiter Classe sind somit die Lösungen I_1 und I_2 niemals unabhängig.*

Die Bestimmung der geodätischen Curven einer Fläche, die auf eine Spiralfläche abwickelbar ist, reducirt sich nach meinen allgemeinen Theorien leicht auf die Integration einer gewöhnlichen Differential-Gleichung *erster* Ordnung. Diese Gleichung scheint jedoch nur in speciellen Fällen integrirbar zu sein.

§ 6.

Die Form der Transformations-Gruppe.

Ich gehe jetzt dazu über, alle Flächen zu bestimmen, deren geodätische Curven *mehrere* inf. Transformationen gestatten. Diese Transformationen bilden in jedem einzelnen Falle eine Gruppe. Daher kann ich mich auf meine allgemeine Theorie der Transformations-Gruppen stützen (Göttinger Nachrichten 1874, N⁰ 22, Archiv for Math. og Naturv. Bd. I. und III). Andererseits stütze ich mich auf Untersuchungen von *Beltrami* und *Schläfli*, nach denen die geodätischen Curven immer dann und nur dann durch eine lineare Gleichung dargestellt werden können, wenn die betreffende Fläche constantes Krümmungsmaas besitzt. Eine solche Fläche lässt sich daher derart auf eine Ebene abbilden, dass ihre geodätische Curven die Geraden der Bildebene werden.

Indem ich diese beiden Theorien verbinde, gelingt es mir in diesem Paragraph zu beweisen, dass die Transformations-Gruppe der geodätischen Curven nur dann mehr als drei Parameter enthalten kann, wenn die Fläche constantes Krümmungsmaas besitzt. Mit den Flächen von constantem Krümmungsmaase brauche ich mich nicht näher zu beschäftigen. Denn nach *Beltrami's* und *Schläfli's* soeben citirten Untersuchungen gestatten ihre geodätischen Curven jedenfalls eine achtgliedrige Gruppe, die durch passenden Coordinatenwahl die lineare Gruppe der Bildebene wird. Und nach mir können sie keine mehr umfassende Gruppe besitzen, da die lineare Gruppe der Ebene in keiner mehr umfassenden Gruppe dieser Ebene enthalten ist.

13. Ich werde jetzt successiv alle Gruppen von Punkt-Transformationen einer Ebene betrachten. Ich stelle dabei die Forderung, dass die betreffende Gruppe eine zweifach unendliche Curven-Schaar, *die sich nicht durch lineare Gleichungen darstellen lässt*, ungeändert lassen soll. Es ist klar, dass die geodätischen Curven der gesuchten Flächen nur eine solche Gruppe besitzen kann, die diese Forderungen erfüllt.

Lass mich zunächst in meiner Aufzählung aller Gruppen der Ebene (Archiv for Math. Bd. 3, pg. 138 u. s. w.) alle Gruppen mit einer Untergruppe der Form q, $X(x)q$ betrachten. Lässt eine solche Gruppe eine zweifach-unendliche Curven-Schaar invariant, so giebt es jedenfalls Curven in dieser Schaar, deren Gleichung sich hinsichtlich y auflösen lässt. Sei $y = f(x)$ eine solche Curve der Schaar. Alsdann gehören sämmtliche Curven mit der Gleichungsform

$$y = f(x) + a + bX$$

der Schaar, die hiermit vollständig definirt ist. Aber diese Schaar wird dargestellt durch eine *lineare* Gleichung zwischen den Grössen $y - f(x)$ und X. Gestatten daher die geodätischen Curven einer Fläche die Gruppe q, $X(x)q$, oder eine Gruppe, die diese zweigliedrige Gruppe umfasst, so hat die Fläche constantes Krümmungsmaass.

Lass uns sodann alle Gruppen mit einer Untergruppe der Form q, yq betrachten. Lässt eine solche Gruppe eine zweifach-unendliche Curven-Schaar invariant, so sei $y = f(x)$ eine Curve dieser Schaar. Alsdann gehören alle Curven mit der Gleichungsform

$$y = af(x) + b$$

der Schaar, die hiermit definirt ist. Sie wird dargestellt durch eine lineare Gleichung zwischen den Grössen y und $f(x)$. Gestatten daher die geodätischen Curven einer Fläche die Gruppe q, yq, oder eine Gruppe, die diese zweigliedrige Gruppe umfasst, so hat die Fläche constantes Krümmungsmaas.

Hieraus folgt, dass die Gleichung der geodätischen Curven jedenfalls nur solche Gruppen gestatten kann, deren sämmtliche zweigliedrige Untergruppen entweder die Form p, q oder die Form p, $xp + yq$ besitzen.

Hieraus schliessen wir, dass *die Gruppe einer jeden Differential-Gleichung 2. O. die nicht durch Punkt-Transformation in die lineare Gleichung $y'' = 0$ übergeführt werden kann, eine der folgenden Formen besitzt:*

$$p;\quad p, q;\quad p, xp + yq;\quad q, p, xp + \lambda yq;$$
$$q, p, xp + (y + \lambda x)q;\quad p, xp + yq, x^2p + (2xy + \lambda y^2)q.$$

Wenn daher die geodätischen Curven einer Fläche, deren Krümmungsmaas nicht constant ist, eine Transformationsgruppe gestatten, so enthält diese Gruppe jedenfalls nicht mehr als d r e i *Parameter.*

§ 7.

Spiralflächen mit mehreren conformen infinitesimalen Transformationen.

Ich bestimme jetzt alle Spiralflächen, die mehrere conforme inf. Transformationen gestatten. Dabei kann ich nach dem Früheren von den Flächen vom constanten Krümmungsmaase wegsehen.

15. Nach den Entwickelungen in § 2 kann ich annehmen, dass es unter den inf. Transformationen $\xi(x)p + \eta(y)q$ der Fläche keine giebt, für welche entweder ξ oder η gleich Null ist. Hieraus folgt, dass die r inf. Transformationen der Gruppe sowohl die einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit $x = \text{Const.}$, wie die Mannigfaltigkeit $y = \text{Const.}$ durch eine r-gliedrige Gruppe transformiren. Folglich (Archiv for Math. Bd. I., pg. 57) ist $r < 4$, und also entweder gleich 2 oder gleich 3. Jedenfalls giebt es 2 inf. Transformationen

$$H_1 = \xi_1 p + \eta_1 q, \quad H_2 = \xi_2 p + \eta_2 q,$$

die eine zweigliedrige Gruppe bilden. Und dabei muss

$$(\xi_1 p + \eta_1 q, \ \xi_2 p + \eta_2 q) \gtrless 0$$

sein, indem sonst $(\xi_1 p, \ \xi_2 p) = 0$ sein müsste, was

$$\xi_2 = \text{Const.}\,\xi_1 = A\xi_1$$

nach sich ziehen würde; und dann besässe die Transformation $AH_1 - H_2$ die Form $\eta(y)q$, was nach dem Vorangehenden nur möglich wäre, wenn die Fläche constantes Krümmungsmaas besässe. Wir können somit setzen

$$(\xi_1 p + \eta_1 q, \ \xi_2 p + \eta_2 q) = \xi_1 p + \eta_1 q$$

und

$$\xi_1 p + \eta_1 q = p + q, \quad \xi_2 p + \eta_2 q = xp + yq, \quad e^w = e^{ax}\Phi(x-y).$$

Es handelt sich darum, die Grössen Φ und a wenn möglich derart zu bestimmen, dass die Fläche auch die Transformation $xp + yq$ gestattet. Wenn wir die betreffenden Werthe in die Gleichungen (5)

$$\frac{d\xi}{dx} + \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} = \varphi(y), \quad \frac{d\eta}{dy} + \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} = f(x)$$

substituiren, so kommt

$$1 + x\frac{dw}{dx} + y\frac{dw}{dy} = \varphi(y) = f(x),$$

sodass $\varphi(y) = f(x) = m + 1$ sein muss. Und w ist bestimmt durch die Gleichung

$$x\frac{dw}{dx} + y\frac{dw}{dy} = m = \text{Const.},$$

wo statt w die Grösse $ax + \log \Phi(x-y)$ zu setzen ist. Dies giebt

$$\frac{(x-y)\,\Phi'}{\Phi} + ax = m,$$

sodass $a = 0$ und

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = \frac{m\,d(x-y)}{x-y}, \quad \Phi = K(x-y)^m$$

sein muss. Hieraus fliesst der Satz.

Die Rotationsfläche, deren Bogenelement die Form

(29) $$ds^2 = K(x-y)^m\,dx\,dy$$

besitzt, und die auf sie abwickelbaren Flächen sind die einzigen, deren geodätische Curven zwei conforme inf. Transformationen gestatten.

Das Krümmungsmaas dieser merkwürdigen Fläche ist gleich

$$\frac{K^2}{(x-y)^{m+2}}.$$

Ist daher $m = -2$, so ist das Krümmungsmaas constant, *sonst aber nicht.*

16. Soll die Fläche (29) noch eine dritte inf. Transformation $\xi(x)p + \eta(y)q$ gestatten, so müssen sowohl die drei Transformationen p, xp, ξp, wie die drei Transformationen q, yq, ηq eine dreigliedrige Gruppe bilden. Also können wir (Archiv for Math., Bd. I., pg. 57) setzen: $\xi = x^2$, $\eta = y^2$; und diese Werthe müssen in (5) eingesetzt werden. Dies giebt

$$2x + x^2\frac{dw}{dx} + y^2\frac{dw}{dy} = \varphi(y), \quad 2y + x^2\frac{dw}{dx} + y^2\frac{dw}{dy} = f(x)$$

wo $e^w = (x-y)^m$ zu setzen ist. Also kommt

$$2x + x^2 . \frac{m}{x-y} - y^2\frac{m}{x-y} = \varphi(y), \quad 2y + x^2 . \frac{m}{x-y} - y^2\frac{m}{x-y} = f(x)$$

und

$$2(x-y) = \varphi(y) - f(x), \quad \varphi(y) = B - 2y, \quad f(x) = B - 2x$$

und

$$(2+m)(x+y) = B,$$

woraus folgt, dass $m = -2$ sein muss. Aber dann hat die Fläche constantes Krümmungsmaas. Also

Ausser der Flächen mit constantem Krümmungsmaase giebt es keine Fläche, deren geodätische Curven mehr als zwei conforme infinitesimale Transformationen gestatten.

Verlangt man, dass das Bogenelement der Fläche $e^w = (x-y)^m$ nicht allein bei der Transformation $p + q$, sondern auch bei der Transformation $xp + yq$ invariant bleiben soll, so findet man (§ 2, n. 5) dass $m = -2$ sein muss. Dies liesse sich übrigens unmittelbar daraus schliessen, dass eine Fläche, die sich in zwei Weisen in sich ohne Ausdehnung verschieben lässt, constantes Krümmungsmaas haben muss.

§ 8.

Spiralflächen, die der zweiten Flächen-Classe angehören.

In diesem Paragraphen bestimme ich alle Flächen, die gleichzeitig der ersten und der zweiten Classe angehören.

17. Da die gesuchte Fläche der zweiten Classe angehören soll, so kann ich immer setzen

$$e^{w'} = y'\,\varphi(x') + \Phi(x'),$$

und es soll möglich sein, wenn ich setze: $y' = Y(y)$, $x' = X(x)$, die Form

$$e^{w} = e^{\omega x}\,\Psi(x-y) \qquad (\omega = \text{Const.})$$

zu erreichen. Dies giebt die Bedingungs-Gleichung

$$[Y\varphi(x') + \Phi(x')]\,Y'(y)\,X'(x) = e^{\omega x}\,\Psi(x-y) = W,$$

wo

$$\frac{dW}{dx} + \frac{dW}{dy} = \omega\,W$$

ist. Setze ich daher: $\varphi X' = f(x)$, $\Phi X' = F(x)$, so erhalte ich zur Bestimmung von den drei unbekannten Funktionen Y, f und F die Relation

$$\frac{d}{dx}(YY'f + Y'F) + \frac{d}{dy}(YY'f + Y'F) = \omega\,(YY'f + Y'F)$$

oder entwickelt

$$YY'f' + Y'F' + (YY'' + Y'^2 - \omega\,YY')f + (Y'' - \omega Y')F = 0. \tag{30}$$

Bestände nun keine Relation der Form

$$\text{Const.}\,f' + \text{Const.}\,F' + \text{Const.}\,f + \text{Const.}\,F = 0, \tag{31}$$

so müssten die Grössen YY', Y', $YY'' + Y'^2 - \omega\,YY'$ und $Y'' - \omega Y'$ sämmtlich verschwinden, so dass $Y = \text{Const.}$ käme. Dies ist indess unmöglich, und daher können wir annehmen, dass f', F', f und F durch eine oder mehrere homogene lineare Relationen verbunden sind. Dabei ist zu bemerken, dass wir von dem Falle, dass f und F durch eine Relation der Form $F = \text{Const.}\,f = A.f$ verbunden sind, wegsehen können. Denn dann käme

$$e^{w} = (YY' + AY')f(x),$$

sodass die Fläche developpabel wäre. Es bestehen daher jedenfalls nicht mehr als zwei Relationen der Form (31). Existirt auf der anderen Seite nur eine solche Relation, so ergiebt sich, dass ein Ausdruck der Form $Y'(A + BY)$ identisch verschwindet, ohne dass die beiden Constanten A und B selbst gleich Null sind. In diesem Falle wäre daher $Y = \text{Const.}$, was an und für sich unmöglich ist.

In dieser Weise erkennen wir die Existenz *zweier* Relationen der Form

$$f' = \alpha f + \beta F, \quad F' = \gamma f + \delta F.$$

Durch Einführung dieser Werthe in (30) kommt

$$(32) \qquad Y Y'' + Y'^2 + (\alpha - \omega) Y Y' + \gamma Y' = 0, \quad Y'' + \beta Y Y' + (\delta - \omega) Y' = 0,$$

woraus durch Elimination von Y'' folgt

$$Y'^2 + \gamma Y' + (\alpha - \delta) Y Y' - \beta Y^2 Y' = 0$$

und da $Y' \gtrless 0$ ist,

$$Y' + \gamma + (\alpha - \delta) Y - \beta Y^2 = 0.$$

Durch Differentiation kommt

$$Y'' + (\alpha - \delta) Y' - 2\beta Y Y' = 0,$$

woraus durch Vergleichung mit (32,2) folgt

$$\alpha - \delta = \delta - \omega, \quad \omega = 2\delta - \alpha, \quad \beta = 0.$$

Bei der weiteren Discussion ist es nothwendig die beiden Fälle $\delta \gtrless \alpha$ und $\delta = \alpha$ separat zu behandeln.

18. Sei zunächst $\delta \gtrless \alpha$. Alsdann werden die drei Gleichungen

$$f' = \alpha f, \quad F' = \gamma f + \delta F, \quad Y' = (\delta - \alpha) Y - \gamma$$

in allgemeinster Weise befriedigt, indem man setzt

$$f = B e^{\alpha x}, \quad F = M e^{\delta x} + \frac{B\gamma}{\alpha - \delta} e^{\alpha x}, \quad Y = \frac{\gamma}{\delta - \alpha} + A e^{(\delta - \alpha) y}.$$

Und zwar ist hierbei zu bemerken, dass diese Integral-Gleichungen auch dann gültig bleiben, wenn entweder α oder δ verschwindet. Also kommt

$$e^{w} = e^{(2\delta - \alpha)x} \left[A^2 B(\delta - \alpha) e^{2(\delta - \alpha)(y - x)} + A M(\delta - \alpha) e^{(\delta - \alpha)(y - x)}\right],$$

oder durch Wegwerfung des unwesentlichen Faktors $(\delta - \alpha) A$, indem wir darnach AB gleich 1 setzen

$$e^{w} = e^{(2\delta - \alpha)x} \left[e^{2(\delta - \alpha)(y - x)} + M e^{(\delta - \alpha)(y - x)}\right].$$

Es steht zurück zu untersuchen, ob die hiermit gefundene Fläche, die nach ihrer Form eine Spiralfläche ist, wirklich zugleich der zweiten Flächen-Classe angehört. Nach den Regeln des Paragraphen 3 führen wir die Grösse $e^{(\delta - \alpha) y}$ als neues y ein. Hierdurch kommt

$$e^{w} = y e^{\alpha x} + N e^{\delta x}$$

Wir müssen versuchen die Gleichungen (14) zu befriedigen. Es ist

$$\frac{d\eta}{dx} = y e^{\alpha x} + N e^{\delta x}, \quad \eta = \frac{1}{\alpha} y e^{\alpha x} + \frac{N}{\delta} e^{\delta x} + \pi(y),$$

welchen Werth wir in (14,1+2)

befriedrigen die Relationen (14) identisch, und dabei bleibt sogar die Constante c_1 unbestimmt.

Die gefundenen Gleichungen erhalten eine sehr bemerkenswerthe Form, wenn wir die Grösse $e^{\delta x}$ als neues x einführen. Alsdann wird

$$(35) \qquad e^w = yx + N, \quad \xi = \frac{x^3}{2} - c_1 x, \quad \eta = \frac{x^2 y}{2} + Nx + c_1 y.$$

Unsere Fläche gestattet, da c_1 eine arbiträre Constante ist, die *beiden* infinitesimalen Transformationen

$$H_1 = xp - yq, \quad H_2 = \frac{1}{2} x^3 p + \left(\frac{1}{2} x^2 y + Nx\right) q,$$

unter denen die erste nur aussagt, dass die Fläche auf eine Spiralfläche (Rotationsfläche) abwickelbar ist.

Nun aber ist klar, da der Ausdruck $yx + N$ hinsichtlich y und x symmetrisch ist, dass unsere Fläche zugleich die inf. Transformation

$$H_3 = \left(\frac{1}{2} y^2 x + Ny\right) p + \frac{1}{2} y^3 q$$

gestattet. Mehrere Transformationen kann unsere Fläche, deren Krümmungsmaas nicht constant ist, nicht gestatten (§ 6). Also müssen H_1, H_2 und H_3 eine Gruppe bilden. Und in der That ist

$$(H_1 H_2) = 2 H_2, \quad (H_1 H_3) = 2 H_3, \quad (H_2 H_3) = N^2 H_1.$$

Da unsere Fläche eo ipso die inf. Transformation $H_2 + H_3$ gestattet, so gehört sie zugleich unserer dritten Flächen-Classe. Also

Die Flächen, deren Bogenelement die Form $ds^2 = (xy + N)\, dx\, dy$ besitzt, gehören gleichzeitig unseren drei Flächen-Classen.

19. Sei jetzt $\delta = \alpha \gtrless 0$. Alsdann werden die Gleichungen

$$f' = \alpha f, \quad F' = \gamma f + \alpha F, \quad Y' = -\gamma$$

in allgemeinster Weise befriedigt, indem man setzt

$$f = B e^{\alpha x}, \quad F = \gamma B x e^{\alpha x} + D e^{\alpha x}, \quad Y = -\gamma y + \varepsilon.$$

Dabei kann man ohne Beschränckung $B = 1$, $\varepsilon = 0$, $\gamma = -1$ setzen. Also wird $e^w = e^{\alpha x}(y + D) - x e^{\alpha x}$, wo D ohne Beschränckung gleich Null gesetzt werden kann:

$$e^w = e^{\alpha x}(y - x).$$

Diese Fläche ist nach ihrer Form auf eine Spiralfläche abwickelbar. Es fragt sich, ob sie zugleich der zweiten Flächen-Classe angehört. Wir müssen versuchen die Gleichungen (14) zu befriedigen. Es ist

$$\frac{d\eta}{dx} = e^{\alpha x}(y - x), \quad \eta = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} y - \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} x + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} + \pi(y),$$

und dabei erkennt man wie früher, dass $\pi(y)$ eine lineare Funktion von y ist: $\pi(y) = c_1 y + c_2$. Nun ist

$$\left(\frac{d\eta}{dy} - f\right) e^w + \xi \frac{d}{dx} e^w + \eta \frac{d}{dy} e^w = 0, \tag{36}$$

also kommt

$$\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c_1 - f\right) e^{\alpha x}(y-x) + \xi\left(\alpha(y-x)-1\right) e^{\alpha x} + \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} y - \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} x + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} + c_1 y + c_2\right) e^{\alpha x} = 0$$

woraus

$$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c_1 - f + \alpha\xi + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c_1 = 0, \quad -x\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c_1 - f\right) - (\alpha x + 1)\xi - \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} x + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} + c_2 = 0 \tag{37}$$

und also wird

$$\xi = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} + c_1 x + c_2$$

Diesen Werth und den Werth von η substituiren wir in die Gleichung

$$6 \frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx} = f(x) + \varphi(y). \tag{38}$$

Dies giebt

$$5\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c_1\right) = f(x) + \varphi(y), \quad f(x) = 5 \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + L.$$

Diesen Werth substituiren wir in (37,1), wodurch kommt

$$-4 \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c_1 - L + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + \alpha c_1 x + \alpha c_2 + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c_1 = 0,$$

was indess eine contradictorische Gleichung ist. *Die Annahme $\delta = \alpha \gtrless 0$ giebt somit Nichts.*

20. Sei endlich $\delta = \alpha = 0$. Alsdann werden die Gleichungen

$$f' = 0, \quad F' = \gamma f, \quad Y' = -\gamma$$

in allgemeinster Weise befriedigt, wenn man setzt

$$f = B, \quad F = \gamma B x + C, \quad Y = -\gamma y + \delta, \quad e^w = \gamma^2 B(y-x) - \gamma(B\delta + C),$$

oder ohne wesentliche Beschränckung

$$e^w = y - x = \frac{d\eta}{dx}.$$

Man findet

$$\eta = yx - \frac{x^2}{2} + c_1 y + c_2,$$

und durch Substitution in (36)

$$(x + c_1 - f)(y - x) - \xi + yx - \frac{x^2}{2} + c_1 y + c_2 = 0$$

woraus

$$f = 2x + 2c_1, \quad \xi = \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

und durch Substitution in (38)

$$6(x + c_1) - (x + c_1) = 2(x + c_1) + \varphi(y)$$

was jedoch eine contradictorische Gleichung ist. *Die Annahme* $\delta = \alpha = 0$ *giebt somit Nichts.*

21. Ich werde zeigen, dass es ausser der gefundenen Flächenfamilie $e^w = xy + D$ keine Flächen giebt, deren geodätische Curven zwei oder mehrere inf. Transformationen der Art $\frac{d\xi}{dy} = 0$, $\frac{d\eta}{dx} \gtrless 0$ besitzen. Für jede solche Fläche können wir nemlich setzen

$$e^w = yf(x) + F(x), \quad \xi_1(x) = 1, \quad \frac{d\eta_1}{dx} = e^w, \quad \xi_2 = \xi_2(x), \quad Y(y)\frac{d\eta_2}{dx} = e^w.$$

Ich behaupte, dass $Y(y)$ eine Constante ist. Wir setzen

$$dy' = \sqrt{Y}\, dy,$$

und führen darnach y' als neues y ein. Alsdann soll der Ausdruck $e^{w'} = (yf + F)\frac{dy}{dy'}$ bekanntlich die Form $y'\varphi(x) + \Phi(x)$ besitzen. Es ist also

$$(yf + F)\frac{dy}{dy'} = y'\varphi + \Phi,$$

woraus durch Differentiation hinsichtlich y', indem ich der Kürze wegen setze

$$\frac{f}{\varphi} = \psi(x), \quad \frac{F}{\varphi} = \Psi(x), \quad y = Y_1(y'),$$

folgt

$$\frac{d}{dy'}(Y_1 Y_1')\psi + \frac{dY_1'}{dy'}\Psi = 1.$$

Bestände nun keine Relation der Form: $A\psi + B\Psi + C = 0$, so müsste 1 gleich Null sein, was an und für sich unmöglich ist. Existirte andererseits mehrere solche Relationen, so käme

$$\text{Const.}\,\psi = \text{Const.}\,\Psi, \quad \text{Const.}\,f = \text{Const.}\,F,$$

und dann wäre die Fläche developpabel, welchen Fall wir ausschliessen können. Also existirt *eine* Relation der Form: $A\psi + B\psi = 1$, woraus folgt, dass

$$\frac{d}{dy'}(Y_1 Y_1') = A, \quad \frac{dY_1'}{dy'} = B$$

$$Y_1 Y_1' = Ay' + A_1, \quad Y_1' = By' + B,$$

und endlich

$$y = Y_1 = Cy' + C_1,$$

$$\frac{dy}{dy'} = C = \frac{1}{\sqrt{Y}}$$

$$F'' + \alpha f + \beta F = 0, \quad f'' + \gamma f + \delta F = 0.$$

Durch Einsetzung folgt

(39) $$Y Y''' + 3\, Y' Y'' + \nu\, Y Y' + \alpha\, Y' = 0, \quad Y''' + \delta\, Y Y' + \beta\, Y' = 0,$$

und durch Elimination von Y'''

$$3\, Y' Y'' - \delta\, Y^2 Y' + (\gamma - \beta)\, Y Y' + \alpha\, Y' = 0,$$

woraus durch Division mit Y' und Differentiation

$$3\, Y''' - 2\delta\, Y Y' + (\gamma - \beta)\, Y' = 0,$$

woraus durch Vergleichung mit (39) folgt, dass $\delta = 0$, $\gamma = 4\beta$ ist. **Zur Bestimmung** von f, F und Y erhalten wir somit die Gleichungen

(40) $$f'' = -4\beta f, \quad F'' = -\beta F - \alpha f, \quad Y'' = -\beta\, Y - \frac{\alpha}{3},$$

bei deren Integration wir verschiedene Fälle separat behandeln müssen.

23. Lass uns zunächst annehmen, dass $\beta \gtrless 0$ ist. Alsdann werden die Gleichungen (40) in allgemeinster Weise befriedigt, wenn wir setzen

$$Y = -\frac{\alpha}{3\beta} + G \sin(y\sqrt{\beta} + \gamma), \quad f = L \sin(2x\sqrt{\beta} + \lambda),$$

$$F = \quad \frac{\alpha}{3\beta} L \sin(2x\sqrt{\beta} + \lambda) + M \sin(x\sqrt{\beta} + \mu),$$

woraus folgt

$$e^w = \left\{ G L \sin(2x\sqrt{\beta} + \lambda) \sin(y\sqrt{\beta} + \gamma) + M \sin(x\sqrt{\beta} + \mu) \right\} G\sqrt{\beta} \cos(y\sqrt{\beta} + \gamma),$$

oder da wir ohne wesentliche Beschränckung $G = 1$, $L = 1$, $\beta = 1$, $\lambda = 0$, $\gamma = 0$ setzen können:

$$e^w = \tfrac{1}{2} \sin 2x . \sin 2y + M \sin(x + \mu) \cos y.$$

Um zu untersuchen, ob diese Fläche der zweiten Classe angehört, führen wir $\sin y$ als neues y ein. Alsdann kommt

$$e^{w_1} = \sin 2x . y + M \sin(x + \mu) = \frac{d\eta}{dx}$$

und durch Integration hinsichtlich x

$$\eta = -\frac{\cos 2x}{2} y - M \cos(x + \mu) + c_1 y + c_2,$$

wo die Integrationsconstante bekanntlich eine lineare Funktion von y ist. Ich substituire in die Gleichung $\left(\frac{d\eta}{dy} - f(x)\right) e^w + \xi \frac{d}{dx} e^w + \eta \frac{d}{dy} e^w = 0$. Dies giebt

$$\left(c_1 - \frac{\cos 2x}{2} - f\right)\left(y . \sin 2x + M \sin(x + \mu)\right) + \xi \left(2y \cos 2x + M \cos(x + \mu)\right)$$
$$+ \left(-\frac{\cos 2x}{2} y - M \cos(x + \mu) + c_1 y + c_2\right) \sin 2x = 0,$$

woraus durch Zerlegung und Auflösung

$$\xi = \frac{\left(c_1 - \frac{\cos 2x}{2}\right)\sin(x+\mu) - \left(\frac{c_2}{M} - \cos(x+\mu)\right)\sin 2x}{\cos(x+\mu) - 2\sin(x+\mu)\operatorname{cotg.} 2x},$$

$$f = 2c_1 - \cos 2x + 2\operatorname{cotg.} 2x \,.\, \xi.$$

Auf der anderen Seite besteht bekanntlich (14,2+3) eine Relation der Form: $6\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx} = f(x) + \varphi(y)$, wo $\varphi(y) = \text{Const.}$ sein muss. Also kommt

$$\frac{d\xi}{dx} = E - 2\cos 2x - 2\operatorname{cotg.} 2x \,.\, \xi.$$

Diese lineare Differential-Gleichung integriren wir und finden somit, dass ξ die Form

$$\xi = \frac{H - E\cos 2x + \cos^2 2x}{2\sin 2x}$$

besitzen muss. Und da diese Form mit der früher gefundenen identisch sein soll, kommt

$$\begin{aligned}(H - E\cos 2x + \cos^2 2x)\left(\cos(x+\mu)\sin 2x - 2\sin(x+\mu)\cos 2x\right)\\ = 2\sin^2 2x\left\{\left(c_1 - \frac{\cos 2x}{2}\right)\sin(x+\mu) - \left(\frac{c_2}{M} - \cos(x+\mu)\right)\sin 2x\right\},\end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}\left(H - E(2\cos^2 x - 1) + (2\cos^2 x - 1)^2\right)(-2\cos^2 x + 2)\cos\mu\\ = 8(1-\cos^2 x)\cos^2 x\cos\mu\left(c_1 + \frac{2\cos^2 x + 1}{2} - 2\cos x\frac{c_2}{M\cos\mu}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(H - E(2\cos^2 x - 1) + (2\cos^2 x - 1)^2\right)\left(-2(1-\cos^2 x) - 2(2\cos^2 x - 1)\right)\sin\mu\\ = 8(1-\cos^2 x)\cos^2 x\left(\left(c_1 - \frac{2\cos^2 x - 1}{2}\right) - 2(1-\cos^2 x)\right)\sin\mu.\end{aligned}$$

Wäre nun sowohl $\cos\mu$ wie $\sin\mu$ verschieden von Null, so käme

$$c_2 = 0,\quad H + E + 1 = 0,\quad -2E - 4 = 4\left(c_1 + \frac{1}{2}\right),$$

$$H + E + 1 = -4\left(c_1 - \frac{3}{2}\right),\quad -2E - 4 = 4\left(c_1 - \frac{3}{2}\right) - 4,$$

welche Gleichungen indess contradictorisch sind. Also muss entweder $\sin\mu$ oder $\cos\mu$ gleich Null sein. Ist $\sin\mu = 0$, so wird $e^w = \sin 2x \,.\, y + M\sin x$, oder wenn wir $\cos x$ als neues x einführen:

$$e^w = -2xy - M,$$

sodass wir die in dem vorangehenden Paragraphen gefundene Flächenfamilie, die wirklich gleichzeitig unseren drei Flächen-Classen angehört, wiederfinden.

Ist $\cos\mu = 0$, kommt $e^w = y.\sin 2x + M\cos x$, oder wenn wir $\sin x$ als neues x einführen: $e^w = 2xy + M$, sodass die Hypothese $\cos\mu = 0$ dieselben Flächen, wie die Annahme $\sin\mu = 0$ liefert.

24. Sei jetzt $\beta = 0$. Alsdann werden die Gleichungen

$$f'' = 0, \quad F'' = -\alpha f, \quad Y'' = -\frac{\alpha}{3}$$

in allgemeinster Weise befriedigt, wenn wir setzen

$$f = Ax + B, \quad Y = -\frac{\alpha}{6}y^2 + \beta y + \gamma, \quad F = -\alpha A\frac{x^3}{6} - \alpha B\frac{x^2}{2} + Cx + D.$$

Also wird, wenn wir Y als neues y einführen

$$e^w = \frac{d\eta}{dx} = y(Ax+B) + \left(-\frac{\alpha A}{6}x^3 - \frac{\alpha B}{2}x^2 + Cx + D\right),$$

$$\eta = y\left(A\frac{x^2}{2} + Bx + E\right) + \left(-\frac{\alpha A}{24}x^4 - \frac{\alpha B}{6}x^3 + C\frac{x^2}{2} + Dx + F\right).$$

Wir substituiren in die Gleichung

$$\left(\frac{d\eta}{dy} - f(x)\right)e^w + \xi\frac{d}{dx}e^w + \eta\frac{d}{dy}e^w = 0.$$

Dies giebt

$$0 = \left(A\frac{x^2}{2} + Bx + E - f\right)\left(y(Ax+B) - \alpha A\frac{x^3}{6} - \alpha B\frac{x^2}{2} + Cx + D\right)$$

$$+\left(Ay - \alpha A\frac{x^2}{2} - \alpha Bx + C\right)\xi + (Ax+B)\left(y\left(A\frac{x^2}{2} + Bx + E\right) - \alpha A\frac{x^4}{24} - \alpha B\frac{x^3}{6} + C\frac{x^2}{2} + Dx + F\right),$$

woraus

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(A\frac{x^2}{2} + Bx + E - f\right)(Ax+B) + A\xi + (Ax+B)\left(A\frac{x^2}{2} + Bx + E\right) = 0,\\ &\left(A\frac{x^2}{2} + Bx + E - f\right)\left(-\alpha A\frac{x^3}{6} - \alpha B\frac{x^2}{2} + Cx + D\right) + \left(-\alpha A\frac{x^2}{2} - \alpha Bx + C\right)\xi\\ &\qquad + (Ax+B)\left(-\alpha A\frac{x^4}{24} - \alpha B\frac{x^3}{6} + C\frac{x^2}{2} + Dx + F\right) = 0.\end{aligned}\right.$$

Andererseits ist $6\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx} = f(x) + \varphi(y)$, woraus

$$(42)\qquad 6\left(A\frac{x^2}{2} + Bx + E\right) - \frac{d\xi}{dx} = f(x) + L.$$

Nun aber ist (41,1) $(Ax+B)f = 2\left(A\frac{x^2}{2} + Bx + E\right)(Ax+B) + A\xi$. Also kommt durch Elimination von f

$$4\left(A\frac{x^2}{2} + Bx + E\right)(Ax+B) - (Ax+B)\frac{d\xi}{dx} = A\xi + L(Ax+B).$$

(43) $$\frac{d}{dx}\Big((Ax+B)\xi\Big)=4\Big(A\frac{x^2}{2}+Bx+E\Big)(Ax+B)-L(Ax+B).$$

Setzen wir nun zunächst voraus, dass $A \gtrless 0$ ist, so können wir $A=1$, $B=0$ setzen. Also kommt

$$\frac{d}{dx}(\xi x)=2x^3+4Ex-Lx,\quad x\xi=\frac{1}{2}x^4+\frac{4E-L}{2}x^2+K,$$

woraus

$$\xi=\frac{1}{2}x^3+\frac{4E-L}{2}x+\frac{K}{x},\quad \frac{d\xi}{dx}=\frac{3}{2}x^2+\frac{4E-L}{2}-\frac{K}{x^2}.$$

Also wird (42)

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{8E-L}{2}+\frac{K}{x^2}.$$

Wir substituiren die gefundenen Werthe von $f(x)$ und ξ in (41,2). Alsdann wird der Coefficient von x^5 gleich $-\frac{3}{24}\alpha$. *Und folglich ist die Grösse α gleich Null.* Also wird $e^w=yx+Cx+D$ oder da wir $C=0$ setzen können:

$$e^w=yx+D,\quad \eta=y\frac{x^2}{2}+Ey+Dx+F,\quad \xi=\frac{x^3}{3}+Gx+\frac{K}{x},$$

wobei wir zur näheren Bestimmung der Constanten die gefundenen Werthe in (41,2) substituiren könnten. Dies ist indess unnothwendig, da wir schon im vorangehenden Paragraphen die allgemeinste infinitesimale Transformation der Fläche $e^w=yx+D$ bestimmt haben.

Sei jetzt $A=0$. Alsdann können wir $B \gtrless 0$ annehmen, indem die Fläche sonst developpabel wäre. Insbesondere können wir $B=1$ setzen. Alsdann wird

$$e^w=y-\frac{\alpha}{2}x^2+Cx+D,\quad \eta=y(x+E)-\frac{\alpha}{6}x^3+\frac{C}{2}x^2+Dx+F;$$

$$\frac{d\xi}{dx}=4(x+E)-L,\quad \xi=2x^2+(4E-L)x+K,\quad f=2(x+E).$$

Wir substituiren diese Werthe in (41,2), und bemerken dabei zunächst, dass der Coefficient von x^3 gleich $-\frac{5}{3}\alpha$ ist, sodass $\alpha=0$ sein muss. Also kommt

$$-(x+E)(Cx+D)+C\Big(2x^2+(4E-L)x+K\Big)+C\frac{x^2}{2}+Dx+F=0$$

sodass $C=0$, und somit die Fläche developpabel wird.

25. Gestattet eine Fläche die beiden inf. Transformationen $\xi_1 p+\eta_1 q$ und $\xi_2 p+\eta_2 q$, wo

$$\frac{d\xi_1}{dy}=0,\quad \frac{d\eta_1}{dx}\gtrless 0,\quad \frac{d\xi_2}{dy}\gtrless 0,\quad \frac{d\eta_2}{dx}=0,$$

so gestattet sie zugleich die Transformation $(\xi_1+\xi_2)p+(\eta_1+\eta_2)q$ und gehört somit sowohl der dritten wie der zweiten Classe. *Die einzige Flächenfamilie, die dieser Annahme entspricht, ist daher* $e^w = yx + D$.

§ 10.

Bestimmung aller Spiralflächen, die der dritten Classe angehören.

Indem ich mir jetzt die Aufgabe stelle, alle Spiralflächen zu finden, die zugleich der dritten Classe gehören, kann ich von denjenigen schon bestimmten Flächen, die zugleich der zweiten Classe angehören, wegsehen. Zugleich kann ich wegsehen von den Flächen $e^w = (x-y)^m$, die *zwei* conforme inf. Transformationen gestatten.

26. Hiernach kann ich annehmen, dass die gesuchte Fläche nur *eine* Transformation $\xi(x)p+\eta(y)q$, etwa $p+q$, und eine oder mehrere Transformationen

$$\xi p+\eta q, \text{ wo } \frac{d\xi}{dy} \gtrless 0, \ \frac{d\eta}{dy} \gtrless 0$$

gestattet. Nach meinen Untersuchungen über Transformationsgruppen kann ich dabei immer annehmen, dass $p+q$ und $\xi p+\eta q$ eine *zwei*gliedrige Gruppe bilden:

$$(p+q, \ \xi p+\eta q) = \varepsilon_1(p+q)+\varepsilon_2(\xi p+\eta q).$$

Ist hierbei $\varepsilon_2 \gtrless 0$, so führe ich statt $p+q$ und $\xi p+\eta q$ die beiden Transformationen $\frac{1}{\varepsilon_2}(p+q)$ und $\xi p+\eta q+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(p+q)$ ein. Hierdurch erkenne ich, dass ich wenn $\varepsilon_2 \gtrless 0$ ist, immer ohne wesentliche Beschränckung $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 = 0$ setzen kann. Ist dagegen $\varepsilon_2 = 0$, so führe ich, wenn $\varepsilon_1 \gtrless 0$ ist, statt $\xi p+\eta q$ die Transformation $\frac{1}{\varepsilon_1}(\xi p+\eta q)$ ein, und erreiche hierdurch dass ε_1 gleich 1 wird. Endlich ist es denkbar, dass gleichzeitig ε_1 und ε_2 gleich Null sind. Hiernach können wir uns auf die Betrachtung von den drei Fällen

$$(p+q, \ \xi p+\eta q)=0; \quad (p+q, \ \xi p+\eta q)=p+q; \quad (p+q, \ \xi p+\eta q)=\xi p+\eta q$$

beschräncken.

27. Ich setze $(p+q, \ \xi p+\eta q) = \varepsilon(p+q)$, woraus folgt

$$\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\xi}{dy}=\varepsilon\,\xi, \quad \frac{d\eta}{dx}+\frac{d\eta}{dy}=\varepsilon\,\eta,$$

und durch Integration, indem man die unwesentlichen Integrations-Constanten weglässt,

$$\xi = f(x-y)+\varepsilon x, \quad \eta = \varphi(x-y)+\varepsilon y.$$

$$\xi' = \left\{ (x''+y'')\log(x''+y'') + (x''-y'')\log(x''-y'') \right\} + Ny'' + X_1(x''),$$

$$\eta' = \left\{ (x''+y'')\log(x''+y'') - (x''-y'')\log(x''-y'') \right\} + Nx'' + Y_1(y'').$$

Zur Bestimmung von X_1 und Y_1 benutzen wir die Gleichungen

$$\xi' = \xi\frac{dx'}{dx} = \frac{\alpha}{2}\,x''\left(f(x-y)+\varepsilon x\right),\quad \eta' = \eta\frac{dy'}{dy} = \frac{\alpha}{2}\,y''\left(\varphi(x-y)+\varepsilon y\right).$$

Die erste giebt durch Division mit x''

$$\left\{\left(1+\frac{y''}{x''}\right)\log\left(1+\frac{y''}{x''}\right) + \left(1-\frac{y''}{x''}\right)\log\left(1-\frac{y''}{x''}\right)\right\} + N\frac{y''}{x''} + 2\log x'' + N\frac{y''}{x''} + \frac{X_1(x'')}{x''}$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left(f(x-y)+\varepsilon x\right) = \frac{\alpha}{2}\,\Omega\left(\frac{x''}{y''}\right) + \frac{\alpha\varepsilon}{2}\log\frac{\alpha x''}{2\sqrt{K}},$$

woraus

$$2\log x'' + \frac{X_1(x'')}{x''} = \frac{\alpha\varepsilon}{2}\log\frac{\alpha x''}{2\sqrt{K}} + P, \qquad (P = \text{Const.})$$

$$X_1(x'') = -2x''\log x'' + \frac{\alpha\varepsilon}{2}x''\log\frac{\alpha x''}{2\sqrt{K}} + Px'',$$

Eine analoge Rechnung giebt

$$Y_1(y'') = -2y''\log y'' + \frac{\alpha\varepsilon}{2}y''\log\frac{\alpha y''}{2\sqrt{L}} + R. \qquad (R = \text{Const.}).$$

Indem wir zu den Bezeichnungen in § 4 zurückkehren, können wir setzen

$$\varphi' = (x''+y'')\log(x''+y'') + \frac{N}{2}(x''+y''),\quad \Phi' = (x''-y'')\log(x''-y'') - \frac{N}{2}(x''-y'')$$

$$\varphi'' = \log(x''+y'') + 1 + \frac{N}{2},\quad \Phi'' = \log(x''-y'') + 1 - \frac{N}{2}$$

$$\varphi''' = \frac{1}{x''+y''},\quad X' = -2x''\log x'' + \frac{\alpha\varepsilon}{2}x''\log\frac{\alpha x''}{2\sqrt{K}} + Px'',$$

$$\Phi''' = \frac{1}{x''-y''},\quad Y' = -2y''\log y'' + \frac{\alpha\varepsilon}{2}y''\log\frac{\alpha y''}{2\sqrt{L}} + Ry''.$$

Diese Werthe müssen in die Fundamental-Gleichung (24) eingetragen werden. Hierdurch käme eine algebraische Relation zwischen x'' und y'' und den folgenden Logarithmen

$$\log(x''+y''),\quad \log(x''-y''),\quad \log x'',\quad \log y''.$$

Da dies indess unmöglich ist, so erkennen wir, dass die Hypothese $\alpha \gtrless 0$ keine Fläche liefert.

28. Lass uns sodann annehmen, dass $\alpha = 0$ ist. Alsdann kommt wie früher

$$\xi = f(x-y) + \varepsilon x,\quad \eta = \Phi(x-y) + \varepsilon y,\quad e^{\omega} = \lambda(x-y) = X(x)\frac{d\xi}{dy} = Y(y)\frac{d\eta}{dx}$$

developpabel. *Die Annahme* $K^2 - L^2 \gtrless 0$ *giebt daher jedenfalls nur developpable Flächen.*

Sei jetzt $K = \pm L$, z. B. $K = + L$. Alsdann können wir ohne Beschränckung $K = L = 1$ setzen. Also kommt, wenn ich $\lambda(x-y) = \mu'(x-y)$ setze,

$$e^w = \lambda(x-y) = \frac{d\xi}{dy} = \frac{d\eta}{dx} = \mu'(x-y), \quad \xi = -\mu(x-y) + X', \quad \eta = \mu(x-y) + Y'.$$

Aber früher fanden wir $\xi = f(x-y) + \varepsilon x$, $\eta = \varphi(x-y) + \varepsilon y$. Also kommt

$$X' = \varepsilon x + \varepsilon_1, \quad Y' = \varepsilon y + \varepsilon_2,$$

und wenn wir zu den Bezeichnungen in § 4 zurückkehren:

$$\varphi'' = 0, \quad \varphi' = 0, \quad \Phi'' = -\mu'(x-y), \quad \Phi' = -\mu(x-y), \quad \xi = \varphi' + \Phi' + X', \quad \eta = \varphi' - \Phi' + Y'.$$

Diese Werthe substituiren wir in die Fundamental-Gleichung (24) und erhalten dadurch zur Bestimmung von μ eine Gleichung der Form

$$2(\mu - \varepsilon(x-y) + \beta)\mu'' - 4\mu'^2 + \gamma\mu' = 0.$$

Um dieselbe zu integriren, setzen wir: $\mu - \varepsilon(x-y) + \beta = \nu$, woraus

$$2\nu\nu'' - 4(\nu' + \varepsilon)^2 + \gamma(\nu' + \varepsilon) = 0,$$

welche Gleichung man nach bekannten Regeln integriren kann (N° 10).

Es ist eo ipso einleuchtend, dass alle Flächen, die man in dieser Weise erhält, gleichzeitig der zweiten und der dritten Classe angehören. Dabei verificirt man leicht, dass die beiden Transformationen

$$H_1 = p + q, \quad H_2 = \big(\varepsilon x - \mu(x-y) + R\big)p + \big(\varepsilon y + \mu(x-y) + S\big)q$$

in der verlangten Beziehung stehen, denn es ist $(H_1 H_2) = \varepsilon H_1$.

29. Sei jetzt $(p + q,\ \xi p + \eta q) = \xi p + \eta q$, woraus

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\xi}{dy} = \xi, \quad \frac{d\eta}{dx} + \frac{d\eta}{dy} = \eta.$$

$$\xi = e^x f(x-y), \quad \eta = e^y \varphi(x-y). \tag{44}$$

Da die Fläche eine Spiralfläche sein soll, ist $e^w = e^{\alpha x}\lambda(x-y)$, und da sie zugleich der dritten Classe angehört, ist

$$X(x)\frac{d\xi}{dy} = e^w = Y(y)\frac{d\eta}{dx},$$

$$-Xe^x f'(x-y) = e^{\alpha x}\lambda(x-y) = Ye^y\varphi'(x-y).$$

Also kann man, indem man mit K und L zwei Constanten bezeichnet, setzen

$$X = K^2 e^{(\alpha-1)x}, \quad Y = L^2 e^{(\alpha-1)y}.$$

Nach den Regeln des Paragraphen 4 führen wir neue Variabeln $x'y'$ ein, indem wir setzen

$$dx' = dx\sqrt{X} = K e^{\frac{\alpha-1}{2}x}\,dx,\quad dy' = L e^{\frac{\alpha-1}{2}y}\,dy,$$

woraus, *indem wir den Fall* $\alpha = 1$ *ausschliessen*

$$x'' = x' + \beta = \frac{2K}{\alpha-1}\,e^{\frac{\alpha-1}{2}x},\quad y'' = y' + \gamma = \frac{2L}{\alpha-1}\,e^{\frac{\alpha-1}{2}y},$$

woraus

$$x = \frac{2}{\alpha-1}\log\frac{(\alpha-1)\,x''}{2K},\quad y = \frac{2}{\alpha-1}\log\frac{(\alpha-1)y''}{2L}.$$

Nun ist

$$e^{w'} = e^{w}\,\frac{dx}{dx'}\,\frac{dy}{dy'} = \frac{e^{\alpha x}\lambda(x-y)}{KL}\,e^{\frac{1-\alpha}{2}(x+y)} = e^{x}\,\Omega(x-y).$$

Und also kommt

$$e^{w'} = x''^{\frac{2}{\alpha-1}}\,\Theta\left(\frac{y''}{x''}\right) = x''^{\frac{2}{\alpha-1}}\,\Theta(\omega).$$

Aber andererseits wissen wir, dass $e^{w'}$ die Form $\psi(x''+y'') + \Psi(x''-y'')$ besitzt, und dass daher $\frac{d^2}{dx''^2}e^{w'} - \frac{d^2}{dy''^2}e^{w'} = 0$. Also findet man zur Bestimmung von Θ die Gleichung

$$(\omega^2-1)\frac{d^2\Theta}{d\omega^2} - 2\,\frac{3-\alpha}{\alpha-1}\,\omega\,\frac{d\Theta}{d\omega} + \frac{2}{\alpha-1}\,\frac{3-\alpha}{\alpha-1}\,\Theta = 0,$$

deren allgemeine Lösung ist $\Theta = L(1+\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}} + M(1-\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}}$, woraus folgt

$$e^{w'} = L(x''+y'')^{\frac{2}{\alpha-1}} + M(x''-y'')^{\frac{2}{\alpha-1}} = \frac{d^2U}{dx''\,dy''}.$$

Dabei ist $\xi' = \frac{dU}{dx'}$, $\eta = \frac{dU}{dy'}$, und also kommt durch Integration, indem wir den Fall $\alpha = -1$ ausschliessen

$$\xi' = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\,L(x''+y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} - \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\,M(x''-y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} + X',$$

$$\eta' = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\,L(x''+y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} + \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\,M(x''-y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} + Y'.$$

Nun aber ist

$$\xi' = \frac{dx'}{dx}\,\xi = \frac{\alpha-1}{2}\,x''\,.\,e^{x} f(x-y) = x''^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\,F\left(\frac{y''}{x''}\right),$$

$$\eta' = \frac{dy'}{dy}\,\eta = \frac{\alpha-1}{2}\,y''\,.\,e^{y}\,\varphi(x-y) = y''^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\,\Phi\left(\frac{y''}{x''}\right).$$

Und also besitzen X' und Y' die Form

$$X' = R\,x''^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}},\quad Y' = S\,y''^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}},$$

von R und S zwei Constanten sind.

Wir kehren jetzt zu den Bezeichnungen des Paragraphen 4 zurück. Es ist

$$\varphi'' = L(x''+y'')^{\frac{2}{\alpha-1}}, \qquad \Phi'' = -M(x''-y'')^{\frac{2}{\alpha-1}},$$

$$\varphi' = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} L(x''+y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}, \quad \Phi' = -\frac{\alpha-1}{\alpha+1} M(x''-y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}},$$

$$\varphi''' = \frac{2}{\alpha-1} L(x''+y'')^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}, \quad \Phi''' = -\frac{2}{\alpha-1} M(x''-y'')^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}.$$

Diese Werthe sollen wir in die Bedingungs-Gleichung (24)

$$0 = (A - X'' - Y'')(\varphi'' - \Phi'') + 4(\varphi''^2 - \Phi''^2)$$
$$-2\varphi'\varphi''' + 2\Phi'\Phi''' - X'(\varphi''' - \Phi''') - Y'(\varphi''' + \Phi''')$$

substituiren. Dabei werden alle Glieder der hervorgehenden Gleichung, ausgenommen $A(\varphi''-\Phi'')$ homogen hinsichtlich $x''\,y''$ von Dimension $\frac{4}{\alpha-1}$; während $A(\varphi''-\Phi'')$ homogen von Dimension $\frac{2}{\alpha-1}$ ist. Also schliessen wir zunächst, dass $A=0$. Es ist

$$(4\varphi''^2 - 2\varphi'\varphi''') : x''^{\frac{4}{\alpha-1}} = 4\frac{\alpha}{\alpha+1} L^2(1+\omega)^{\frac{4}{\alpha-1}},$$

$$(-4\Phi''^2 + 2\Phi'\Phi''') : x''^{\frac{4}{\alpha-1}} = -4\frac{\alpha}{\alpha+1} M^2(1-\omega)^{\frac{4}{\alpha-1}},$$

$$(-X''\varphi'' - X'\varphi''') : x''^{\frac{4}{\alpha-1}} = -RL\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}(1+\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}} + \frac{2}{\alpha-1}(1+\omega)^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}\right],$$

$$(X''\Phi'' + X'\Phi''') : x''^{\frac{4}{\alpha-1}} = -RM\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}(1-\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}} + \frac{2}{\alpha-1}(1-\omega)^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}\right],$$

$$(-Y''\varphi'' - Y'\varphi''') : x''^{\frac{4}{\alpha-1}} = -SL\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\omega^{\frac{2}{\alpha-1}}(1+\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}} + \frac{2}{\alpha-1}\omega^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(1+\omega)^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}\right],$$

$$(Y''\Phi'' - Y'\Phi''') : x''^{\frac{4}{\alpha-1}} = -SM\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\omega^{\frac{2}{\alpha-1}}(1-\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}} - \frac{2}{\alpha-1}\omega^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(1-\omega)^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}\right];$$

und da die Summe der linksstehenden Glieder gleich Null ist, so verschwindet auch die Summe der rechtsstehenden Glieder. Setzen wir jetzt zunächst voraus, dass $\frac{2}{\alpha-1}$ keine ganze (positive oder negative) Zahl ist, so erkennen wir durch Reihenentwickelung nach den Potenzen von ω, dass die Summe der beiden letzten rechtsstehenden Glieder gleich Null ist. In Folge dessen ist

$$S(L+M)=0, \quad S(L-M)=0$$

woraus, da L und M nicht beide verschwinden dürfen, folgt, dass S gleich Null ist. Und da die Grössen x'' und y'' gleichberechtigt sind, schliessen wir, dass auch R

gleich Null ist. Unsere Bedingungs-Gleichung reducirt sich daher auf die beiden ersten Glieder, deren Summe nur dann verschwindet, wenn α gleich Null ist. Ist andererseits $\frac{2}{\alpha-1}$ eine ganze negative Zahl (doch nicht -1), so erkennt man ganz ebenso, dass R und S gleich Null sein müssen, und dass jedenfalls nur die Annahme $\alpha=0$ eine Lösung unseres Problems liefern kann.

Die Annahme $\alpha=0$ *liefert die Fläche*

$$e^w=\frac{L}{(x+y)^2}+\frac{M}{(x-y)^2},$$

die auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist, und gleichzeitig der dritten Classe angehört.

Da die Annahme $\frac{2}{\alpha-1}=-1$ auf den schon früher ausgeschlossenen Fall $\alpha=-1$ führen würde, so steht jetzt nur die Annahme, dass $\frac{2}{\alpha-1}$ eine ganze positive Zahl ist, zurück. In diesem Falle werden sämtliche Glieder unserer Bedingungs-Gleichung ganze Funktionen von ω. Elementare Ueberlegungen zeigen, dass $\frac{2}{\alpha-1}=1$, $M=iL$ sein muss. *Hiermit erhalten wir die Fläche* (§ 7, N⁰ 15)

$$e^w=x+iy,$$

die drei verschiedene infinitesimale Transformationen

$$H_1=p+iq,\quad H_2=xp+yq,\quad H_3=\left(\frac{3}{2}x^2+ixy+\frac{y^2}{2}\right)p+\left(i\frac{x^2}{2}+xy+\frac{3i}{2}y^2\right)q$$

gestattet. Man verificirt leicht, dass dieselben eine dreigliedrige Gruppe bilden.

Die früher ausgeschlossenen Fälle $\alpha=\pm 1$ liefern, wie ich bei einer anderen Gelegenheit näher nachweisen werde, keine Lösung unseres Problems. Im Uebrigen behalte ich mich vor, einige im Vorangehenden angeregten Fragen*) zu behandeln.

December 1878.

*) Man kann verlangen, dass die Differential-Gleichung der geodätischen Curven eine Lösung der Form $f_0(xy)y'^m+f_1y'^{m+1}+f_2y'^{m+2}+\cdots+f_ny'^{m+n}$, wo m eine ganz beliebige Zahl, n eine ganze Zahl, $f_0\ldots f_n$ Funktionen von xy bezeichnen, besitzen soll. Es ergiebt sich, dass es immer ausgedehnte Flächenclassen giebt, die diese Forderung erfüllen, *welche Werthe auch m und n haben mögen.* Ist $m=-\frac{1}{2}$, $n=1$, so erhält man die Rotationsflächen; ist $m=-1$, $n=2$, so erhält man die *Liouvilleschen* Flächen $e^w=\psi(x+y)+\Psi(x-y)$; ist endlich $m=0$, $n=1$, so erhält man die Flächen $e^w=y\varphi(x)+\Phi(x)$; u. s. w. Dies giebt ein neues Classifications-Princip der Flächen.